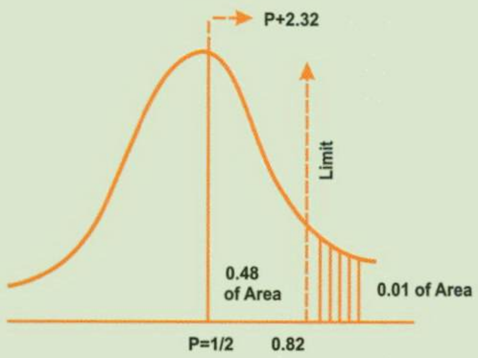
ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯ ಮುಕ್ತ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ
ಮುಕ್ತಗಂಗೋತ್ರಿ, ಮೈಸೂರು – ೫೭೦ ೦೦೬.

KARNATAKA STATE OPEN UNIVERSITY
MUKTHAGANGOTRI, MYSORE - 570 006.

ಪ್ರಥಮ ಎಂ.ಎ.
ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರ

ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಪರಿಮಾಣಾತ್ಮಕ ವಿಧಾನಗಳು



$$\text{Mean } (\pm) = \frac{X_1+X_2+X_3+\cdots+X_n}{N}$$

Shops	Sales Before Compaign	Sales After Compaign	Differance	Differance Squared
A	53	58	+5	25
B	28	29	+1	1
C	31	30	1	1
D	48	55	+7	49
E	50	56	+6	36
F	42	45	+3	9

ಕೋರ್ಸ್ : 3

ಬ್ಲಾಕ್ : 1 to 7

ಕರಾಮುವಿ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಅಂತಾರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಮಾನ್ಯತೆ

- ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯ ಮುಕ್ತ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯವು ಜೂನ್ ೧, ೧೯೯೬ ರಂದು ಸರ್ಕಾರಿ ಅದೇಶ ಸಂಖ್ಯೆ : ED1/UOV/dated 12 February 1996 (Karnataka State Open University Act - 1992) ರ ಪ್ರಕಾರ ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯಪಾಲರ ಅನುಮೋದನೆಯೊಂದಿಗೆ ಪೂರ್ಣಪ್ರಮಾಣದ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯವಾಗಿ ಸ್ಥಾಪನೆಗೊಂಡಿತು. ರಾಜ್ಯದ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ 'ದೂರ ಶಿಕ್ಷಣ ಪದ್ಧತಿ'ಯನ್ನು ಆರಂಭಿಸುವ ಮತ್ತು ಉತ್ತೇಜಿಸುವ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಈ ಮುಕ್ತ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯವನ್ನು ಅಧಿನಿಯಮದ ಮೂಲಕ ಸ್ಥಾಪಿಸಲಾಯಿತು.
- ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯ ಮುಕ್ತ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದ ಅಧಿನಿಯಮ ೧೯೯೨ ರಂತೆ ಈ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯವು ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯದ ಒಳಗೆ ಸಂಸ್ಥೆಗಳನ್ನು, ಕಾಲೇಜುಗಳನ್ನು, ಪ್ರಾದೇಶಿಕ ಕೇಂದ್ರಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಅಧ್ಯಯನ ಕೇಂದ್ರಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸುವ, ನಿರ್ವಹಿಸುವ ಮತ್ತು ಮಾನ್ಯತೆ ಕೊಡುವ ಅಧಿಕಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಅಗತ್ಯವಿದ್ದ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯದ ಹೊರಗಿನ ಸ್ಥಳಗಳಲ್ಲೂ ಪ್ರಾದೇಶಿಕ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ಅಧ್ಯಯನ ಕೇಂದ್ರಗಳನ್ನು ತೆರೆಯಲು ಅಧಿಕಾರವನ್ನು ಪಡೆದಿದೆ.
- ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯ ಮುಕ್ತ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದ ಎಲ್ಲಾ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮಗಳು 'ದೂರ ಶಿಕ್ಷಣ ಮಂಡಳಿ' (DEC), ಮಾನವಸಂಪನ್ಮೂಲ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಸಚಿವಾಲಯ (MHRD), ನವದೆಹಲಿಯ ಮಾನ್ಯತೆಯನ್ನು ಪಡೆದಿವೆ.
- ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯ ಮುಕ್ತ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯವು ೧೯೯೯ರಿಂದ ನವದೆಹಲಿಯಲ್ಲಿರುವ 'ಭಾರತೀಯ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯಗಳ ಸಂಘ'ದ (AIU) ಖಾಯಂ ಸದಸ್ಯತ್ವವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.
- ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯ ಮುಕ್ತ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯವು ೧೯೯೯ರಿಂದ 'ಕಾಮನ್‌ವೆಲ್ತ್ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯಗಳ ಸಂಘ' (ACU), ಲಂಡನ್, ಯುನೈಟೆಡ್ ಕಿಂಗ್‌ಡಮ್‌ನ ಶಾಶ್ವತ ಸದಸ್ಯ ಸಂಸ್ಥೆಯಾಗಿದೆ. ಸದಸ್ಯತ್ವದ ಸಂಖ್ಯೆ : ZKASOPENUINI.
- ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯ ಮುಕ್ತ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯವು ೧೯೯೯ ರಿಂದ 'ಏಷಿಯಾದ ಮುಕ್ತ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯಗಳ ಸಂಘ' (AAOU), ಬೀಜಿಂಗ್, ಚೀನಾ – ಇದರ ಶಾಶ್ವತ ಸದಸ್ಯ ಸಂಸ್ಥೆಯಾಗಿದೆ.
- ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯ ಮುಕ್ತ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯವು 'ಕಾಮನ್‌ವೆಲ್ತ್ ಆಫ್ ಲರ್ನಿಂಗ್' (COL) ಕೆನಡ, ಇದರ ಸಹಯೋಗವನ್ನು ೨೦೦೩ ರಿಂದ ಹೊಂದಿದೆ. 'ಕಾಮನ್‌ವೆಲ್ತ್ ಆಫ್ ಲರ್ನಿಂಗ್' ಎನ್ನುವುದು ದೂರ ಶಿಕ್ಷಣದಲ್ಲಿ ಮುಕ್ತಕಲಿಕಾ ತಿಳಿವಳಿಕೆ, ಸಂಪನ್ಮೂಲಗಳು ಮತ್ತು ತಂತ್ರಜ್ಞಾನಗಳ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಮತ್ತು ಹಂಚುವಿಕೆಗಳನ್ನು ಪ್ರೋತ್ಸಾಹಿಸುವ ಉದ್ದೇಶದಿಂದ ಕಾಮನ್‌ವೆಲ್ತ್ ದೇಶಗಳ ಸರ್ಕಾರಗಳಿಂದ ನಿರ್ಮಾಣಗೊಂಡ ಅಂತಾರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಸರ್ಕಾರಿ ಸಂಸ್ಥೆಯಾಗಿದೆ.

ಉನ್ನತ ಶಿಕ್ಷಣ ಎಲ್ಲರಿಗೂ ಎಲ್ಲೆಡೆ

ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯ ಮುಕ್ತ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ

ಮುಕ್ತಗಂಗೋತ್ರಿ, ಮೈಸೂರು–006.

ಪ್ರಥಮ ಎಂ.ಎ.

ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರ

ಕೋರ್ಸ್ 3

ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಪರಿಮಾಣಾತ್ಮಕ ವಿಧಾನಗಳು

I M.A ECO K.M C-3 B-1to7 (312pgs) T.F-20 SVE-13 F.NO-311

ಬ್ಲಾಕ್ – 5

ಬ್ಲಾಕ್ – 6

ಬ್ಲಾಕ್ – 7

ಕುಲಸಚಿವರು (ಆಡಳಿತ)
ಕ.ರಾ.ಮು.ವಿ., ಯ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ವಿಭಾಗದಿಂದ ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯ ಮುಕ್ತ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದ ಕೋರ್ಸ್‌ಗಳ ಹೆಚ್ಚಿನ ವಿವರಗಳಿಗೆ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದ ಕಾರ್ಯಾಲಯ, ಮುಕ್ತಗಂಗೋತ್ರಿ, ಮೈಸೂರು – 6 ಇಲ್ಲಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಕೋರ್ಸ್ – 3

ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಪರಿಮಾಣಾತ್ಮಕ ವಿಧಾನಗಳು

ಬ್ಲಾಕ್ – 1 ರ ಪರಿಚಯ

ಈ ಬ್ಲಾಕಿನಲ್ಲಿ ಐದು ಘಟಕಗಳಿದ್ದು, ಘಟಕ–1ರಲ್ಲಿ ಬಿಂಬಕ ಮತ್ತು ಬಿಂಬಕ ಸಂಬಂಧಗಳು, ಘಟಕ–2 ರಲ್ಲಿ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಸರಳ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕಗಳ ಅನ್ವಯ, ಘಟಕ–3ರಲ್ಲಿ ವಕ್ರರೇಖೆ ಬಿಂಬಕದ ಉಪಯೋಗಗಳು, ಘಟಕ–4ರಲ್ಲಿ ಡಿಫರೆನ್ಷಿಯಲ್ ಕ್ಯಾಲುಕ್ಯುಲಸ್ ಮತ್ತು ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಅದರ ಅನ್ವಯ ಮತ್ತು ಘಟಕ–5ರಲ್ಲಿ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಡಿಫರೆನ್ಷಿಯಲ್ ಕ್ಯಾಲುಕ್ಯಾಲಸ್ ಅನ್ವಯದ ಬಗ್ಗೆ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಬ್ಲಾಕ್ – 2 ರ ಪರಿಚಯ

ಈ ಬ್ಲಾಕ್ ಒಟ್ಟು ನಾಲ್ಕು ಘಟಕಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ.

ಘಟಕ 6	:	ಬಿಂಬಕ ಮತ್ತು ಬಿಂಬಕ ಸಂಬಂಧಗಳು
ಘಟಕ 7	:	ಆದಾಯ ಗರಿಷ್ಠತೆ ಮತ್ತು ವೆಚ್ಚ ಕನಿಷ್ಠತೆ
ಘಟಕ 8	:	ಅನೇಕ ಚಲಗಳ ಬಿಂಬಕಗಳು
ಘಟಕ 9	:	ಹಲವು ಚಲಗಳ ಡಿಫರೆನ್ಷಿಯೇಷನ್ – ಅನ್ವಯಗಳು

ಬ್ಲಾಕ್ – 3 ರ ಪರಿಚಯ

ಈ ಬ್ಲಾಕ್‌ನಲ್ಲಿ ನೀವು 3 ಯೂನಿಟ್‌ಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುತ್ತೀರಿ. ಯೂನಿಟ್ 12ರಲ್ಲಿ ಮ್ಯಾಟ್ರಿಕ್ಸ್ ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಪರಿಚಯ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದರ ಜೊತೆಗೆ, ವಿವಿಧ ಮಾತೃಕೆಗಳು, ಅವುಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸಂಕಲನ, ವ್ಯವಕಲನ, ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ಕಲಿಯುತ್ತೀರಿ. ಜೊತೆಗೆ ಮಾತೃಕೆಗಳಿಂದ ನಿರ್ಧಾರಕಗಳನ್ನು ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಸಹ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುತ್ತೀರಿ. ಯೂನಿಟ್ 13ರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿನ ಅವ್ಯಕ್ತ ಚಲನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನ ಮತ್ತು ಕ್ರಾಮರ್ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುತ್ತೀರಿ. ಜೊತೆಗೆ, ಆದಾನ–ವಿದಾನ ನಿಯಮವನ್ನು ಸಹ ಕಲಿಯುತ್ತೀರಿ. ಯೂನಿಟ್ 14ರಲ್ಲಿ ಸರಳ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕ ಕಾರ್ಯಾಚರಣೆಯನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುತ್ತೀರಿ. ಈ ಮೂರೂ ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಅತಿ ಮುಖ್ಯ. ಆದ್ದರಿಂದ ಎಚ್ಚರಿಕೆಯಿಂದ ಈ ಪಾಠಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿ.

ಬ್ಲಾಕ್ – 4 ರ ಪರಿಚಯ

ಈ ಬ್ಲಾಕ್‌ನೊಂದಿಗೆ ನೀವು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಧಾನಗಳ ಅಧ್ಯಯನವನ್ನು ಪ್ರವೇಶಿಸುತ್ತೀರಿ. ಈ ಹಿಂದೆಯೇ ತಿಳಿಸಿರುವಂತೆ ಪರಿಮಾಣಾತ್ಮಕ ವಿಧಾನಗಳಲ್ಲಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಮೊದಲ ಮೂರು ಬ್ಲಾಕ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ನೀವು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸಮಾಡಿದ್ದೀರಿ. ಬ್ಲಾಕ್ 4 ರಿಂದ 7ರವರೆಗೆ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುತ್ತೀರಿ. ಬ್ಲಾಕ್ 4,5 ಘಟಕಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ನೀವು ಸಂಖ್ಯಾ ಶಾಸ್ತ್ರದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ, ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಸಂಖ್ಯಾ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ, ಸಂಖ್ಯಾ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಹೇಗೆ ವಿವಿಧ ಚಿತ್ರಗಳ ಮೂಲಕ ಅಂಕಿ–ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಕೇಂದ್ರೀಯ ಮಾಪನಗಳು ಯಾವುವು? ಇವುಗಳ ಉಪಯೋಗವೇನು? ಎನ್ನುವ ಮುಖ್ಯ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುತ್ತೀರಿ. ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಈ ಬ್ಲಾಕ್ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ವಿಷಯ ಪ್ರವೇಶಿಕ ಎನ್ನಬಹುದು. ಮುಂದಿನ ಬ್ಲಾಕ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ಮೂಲ ಪರಿಕರಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೀರಿ. ವಾಸ್ತವವಾಗಿ, ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರಕ್ಕೆ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ಕೊಡುಗೆ ಅಪಾರ. ಇಂದು ನಾವು ಯಾವುದೇ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದ ತತ್ವವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಬೇಕಾದರೂ, ಅದಕ್ಕೆ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ನೆರವನ್ನು ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಯಾವುದೇ ತತ್ವಕ್ಕೆ

ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ಪುರಾವೆಗಳನ್ನು ದೊರಕಿಸಿಕೊಟ್ಟು ಆ ತತ್ವವನ್ನು ಗಟ್ಟಿ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಪರಿಣಿತಿಯನ್ನು ಪಡೆದುಕೊಂಡಿರಬೇಕಾದುದು ಅತ್ಯಗತ್ಯ. ಘಟಕ 15ರಲ್ಲಿ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯೊಂದಿಗೆ ನೀವು ವಿಷಯ ಪ್ರವೇಶ ಮಾಡುತ್ತೀರಿ.

ಬ್ಲಾಕ್ – 5 ರಿಂದ 7 ಪರಿಚಯ

ಈ ಬ್ಲಾಕ್‌ನಲ್ಲಿ ನೀವು 4 ಘಟಕಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುತ್ತೀರಿ. ಅವುಗಳ ವಿಷಯಗಳೆಂದರೆ, ಸೂಚ್ಯಂಕಗಳು, ಸಂಭಾವನೀಯತೆ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳು ಮತ್ತು ಕೆಲವು ತಾತ್ವಿಕ ವಿತರಣೆಗಳು ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಈ ಮೂರು ವಿಷಯಗಳ ಅನ್ವಯ ತುಂಬಾ ಮಹತ್ವದ್ದಾಗಿದೆ. ಸೂಚ್ಯಂಕಗಳನ್ನು ನಾವು ತುಂಬಾ ವ್ಯಾಪಕವಾಗಿ ಬಳಸುತ್ತೇವೆ. ಬೆಲೆ ಸೂಚ್ಯಂಕ, ಅನುಭೋಗಿ ಬೆಲೆ ಸೂಚ್ಯಂಕ, ಕೈಗಾರಿಕಾ ಕಾರ್ಮಿಕರ ಸೂಚ್ಯಂಕ, ರಫ್ತು ಸೂಚ್ಯಂಕ, ಆಮದು ಸೂಚ್ಯಂಕ, ಇತ್ಯಾದಿ ಪರಿಭಾವನೆಗಳನ್ನು ನಾವು ಬಹುವಾಗಿ ಬಳಸುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಸೂಚ್ಯಂಕ ಎನ್ನುವುದು ತುಂಬಾ ಮುಖ್ಯವಾದ ಪರಿಭಾವನೆ ಘಟಕ 27 ಮತ್ತು 28ರಲ್ಲಿ ಕೂಲಂಕುಷವಾಗಿ ಈ ಪರಿಭಾವನೆಯನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ಮೊದಲೇ ನಾವು ವಿವರಿಸಿರುವಂತೆ ಆರ್ಥಿಕ ಕ್ರಿಯೆಗಳು ಬಹಳ ಬದಲಾವಣೆಗಳನ್ನು ಅನುಭವಿಸುತ್ತವೆ. ಇದರಿಂದಾಗಿಯೇ ಮುಂದೆ ಒಂದು ಆರ್ಥಿಕ ಕ್ರಿಯೆ ಹೇಗೆ ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಮುಂಗಾಣುವುದು ಬಹಳ ಕಷ್ಟ. ಆದರೆ, ಒಂದು ಆರ್ಥಿಕ ಕ್ರಿಯೆ ಸರಾಸರಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ವರ್ತಿಸಬಹುದು ಮತ್ತು ಹೀಗೆ ವರ್ತಿಸಬಹುದಾದುದರ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು? ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡುವುದು ಸಾಧ್ಯ. ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ ಶಾಸ್ತ್ರ ಬಹಳ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಹೊಂದಿದೆ. ಇದನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ನಾವು ಆರ್ಥಿಕ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ಮುಂದಿನ ಗತಿಯನ್ನು ಊಹಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳ ಪರಿಚಯ ಅತ್ಯಗತ್ಯ.

ಘಟಕ 29ರಲ್ಲಿ ಸಂಭಾವನೀಯತೆಯ ಸರಳ ತತ್ವಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಆಸಕ್ತಿ ಇರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಇದರ ಬಗ್ಗೆ ಹೆಚ್ಚು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವುದರಿಂದ ಅವರು ಉತ್ತಮ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಾಗುವುದು ಸಾಧ್ಯ.

ಯಾವುದೇ ಅಂಕಿ-ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನಾವು ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಮೂಡಿಸಿದಾಗ ಅವುಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಮೂರ್ತ ಸ್ವರೂಪ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಈ ನಕ್ಷೆಗಳ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ, ಗಣಿತೀಯ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯ ಈಗ ಲಭ್ಯವಿರುವ ಸಾಫ್ಟ್‌ವೇರ್‌ಗಳಂತು ತುಂಬಾ ಸುಲಭವಾಗಿ ಈ ರೀತಿಯ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸುತ್ತವೆ. ಅಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಸಾವಿರಾರು ಬಿಂಬಕಗಳಿರುವುದು ಸಾಧ್ಯ ಇವುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸುವ ಕ್ರಿಯೆ ನಡೆದೇ ಇದೆ. ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಮೂಡಿಸುವ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಅವುಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಗಣಿತೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ತಾತ್ವಿಕ ವಿತರಣೆಗಳು (theoretical distribution) ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ವಿತರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಮೂರನ್ನು, ಅಂದರೆ ಬೈನಾಮಿಯಲ್, ನಾರ್ಮಲ್ ಮತ್ತು ಪಾಯಿಸನ್ ವಿತರಣೆಗಳನ್ನು ನಿಮಗೆ ಪರಿಚಯಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ವಿತರಣೆಗಳ ಲಕ್ಷಣಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಅನ್ವಯವನ್ನು ಸಹ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ಬ್ಲಾಕ್‌ನ ನಾಲ್ಕು ಘಟಕಗಳನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಎಚ್ಚರಿಕೆಯಿಂದ ಓದಿ ಅರ್ಥ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಅಗತ್ಯ.

ಡಾ. ಎಂ.ಎಸ್. ರಮಾನಂದ
ಅಧ್ಯಕ್ಷರು ಮತ್ತು ಸಹ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು
ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರ ಅಧ್ಯಯನ ಮತ್ತು ಸಂಶೋಧನಾ ವಿಭಾಗ,
ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯ ಮುಕ್ತ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ,
ಮೈಸೂರು – 6

ಪ್ರಥಮ ಎಂ.ಎ

ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರ

ಕೋರ್ಸ್ - 3

ಘಟಕ - 1 : ಬಿಂಬಕ ಮತ್ತು ಬಿಂಬಕ ಸಂಬಂಧಗಳು

ರಚನೆ :

1.0 ಪ್ರಸ್ತಾವನೆ

ಸಾಮಾಜಿಕ ವಿಜ್ಞಾನಗಳಲ್ಲಿ ಇಂದು ಪರಿಮಾಣಾತ್ಮಕ ವಿಧಾನಗಳ ಬಳಕೆ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ. ಅದರಲ್ಲೂ ಗಣಿತ ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯಾ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳನ್ನು ಸಾಮಾಜಿಕ ವಿಜ್ಞಾನಗಳಲ್ಲಿ, ತತ್ವಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸಲು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಸತ್ಯಾಸತ್ಯತೆಯನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಲು ವ್ಯಾಪಕವಾಗಿ ಬಳಸಲಾಗುತ್ತಿದೆ. ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರಗಳು ತುಂಬಾ ವ್ಯವಸ್ಥಿತವಾಗಿ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗೊಂಡಿರುವ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳಾಗಿವೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪರಿಮಾಣಾತ್ಮಕ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಕ್ರಮಬದ್ಧವಾಗಿ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ಆರ್ಥಿಕ ಕ್ರಿಯೆಗಳು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಕ್ಕೆ ಒಳಗೊಳ್ಳುವಂಥವು. ಆದ್ದರಿಂದ ಇವುಗಳಿಗೆ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಗಳನ್ನು ಅಳವಡಿಸುವುದು ಸುಲಭ ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಘಟಕ 1 : ಗಣಿತೀಯ ವಿಧಾನಗಳು - 1

ಈ ಘಟಕವನ್ನು ಐದು ಯೂನಿಟ್‌ಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ನಿಮಗೆ ಪರಿಮಾಣಾತ್ಮಕ ವಿಧಾನದ ಗಣಿತದ ಭಾಗವನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಅನ್ವಯವನ್ನು ಏಕೆ ಮಾಡಬೇಕು? ಅದರ ಪ್ರಯೋಜನಗಳೇನು ಎನ್ನುವುದರೊಂದಿಗೆ ಈ ಘಟಕ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗುತ್ತದೆ. ನಂತರ, ಯೂನಿಟ್ ಒಂದರಲ್ಲಿ ಗಣಿತದ ಮೂಲ ಪರಿಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಬಿಂಬಕ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿ, ಯೂನಿಟ್ ಎರಡರಲ್ಲಿ ಬಿಂಬಕ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಉದಾಹರಣೆಗಳೊಡನೆ ವಿವರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಸರಳ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಗಳು ಮತ್ತು ವಕ್ರ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕಗಳ ನಡುವಣ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದರೊಂದಿಗೆ, ಯೂನಿಟ್ ಮೂರರಲ್ಲಿ ವಿವಿಧ ವಕ್ರ ರೇಖಾ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಜೊತೆಗೆ ಇವುಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ವಿವರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅವಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಒಂದು ಮುಖ್ಯ ಭಾಗ. ಆಧುನಿಕ ಪ್ರಪಂಚದಲ್ಲಿ ಈ ಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳದ ಮಾನವ ವಿಜ್ಞಾನವೇ ಇಲ್ಲ. ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರ ಇದಕ್ಕೆ ಹೊರತಾದುದಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಯೂನಿಟ್ ನಾಲ್ಕು ಮತ್ತು ಐದರಲ್ಲಿ ಅವಕಲನಶಾಸ್ತ್ರದ ಮೂಲ ತತ್ವಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸುವುದರೊಂದಿಗೆ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಅದರ ವಿವಿಧ ಅನ್ವಯಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ಘಟಕದ ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಅಗತ್ಯವಾಗುವ ಗಣಿತೀಯ ವಿಧಾನಗಳ ಮೂಲ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸುತ್ತವೆ. ಮುಂದಿನ ಘಟಕಗಳಿಗೆ ಇದು ತುಂಬಾ ಸಹಾಯಕವಾಗುತ್ತದೆ ಸಹ.

1.1 ಬಿಂಬಕದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಆರ್ಥಿಕ ಚಲಗಳ ನಡುವಣ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲು ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಬಿಂಬಕ, ಸ್ಥಿರ ಮತ್ತು ಚಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು

ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಪರಿಮಾಣದ ಸಂಖ್ಯಾ ಮೌಲ್ಯವು ಯಾವಾಗಲೂ ನಿಯಮಿತವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ ಈ ಪರಿಮಾಣದ ಸಂಖ್ಯಾ ಮೌಲ್ಯವು ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗುತ್ತಾ ಹೋದರೆ ಅದನ್ನು 'ಚಲ' ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಒಂದು ದಿನ ಮಾರುಕಟ್ಟೆಯಲ್ಲಿ ಸರಬರಾಜಾಗುವ ಹೂವು, ಹಣ್ಣು, ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆ. ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಚಲ ಇವೆರಡನ್ನೂ ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಅನೇಕ ಆರ್ಥಿಕ ಕ್ರಿಯೆಗಳ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಬಿಂಬಕಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಆರ್ಥಿಕ ಕ್ರಿಯೆಗೂ ಒಂದೊಂದು ಸಂಕೇತವನ್ನು ಕೊಟ್ಟು ಅದು ಮತ್ತೊಂದು ಆರ್ಥಿಕ ಕ್ರಿಯೆಯ ಸಂಕೇತದೊಡನೆ ಸಂಬಂಧ ಹೊಂದಿದೆಯೇ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಬಿಂಬಕದ ಮೂಲಕ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು.

ಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಬಿಂಬಕ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

x ಮತ್ತು y ಎರಡು ಗಣಗಳಾಗಿದ್ದು, x ಗಣಕ್ಕೆ ಸೇರಿದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು x ಧಾತುವಿಗೂ y ಗಣಕ್ಕೆ ಸೇರಿದ ಒಂದು ವಿಶಿಷ್ಟ y ಧಾತುವಿನೊಡನೆ ಸಂಬಂಧ ಕಲ್ಪಿಸುವ f ಎಂಬ ಒಂದು ನಿಯಮವಿದ್ದರೆ ಈ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಬಿಂಬಕ ಸಂಬಂಧವೆಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ನಿರೂಪಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

$$y = f(x)$$

y, x ನ ಬಿಂಬಕವೆಂದು ಇದನ್ನು ಓದಬೇಕು, ಇದರ ಅರ್ಥ y, x ನ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿದೆ ಎಂದು. ಇಲ್ಲಿ x ಬದಲಾವಣೆಗೊಂಡಾಗಲೆಲ್ಲ y ನ ಮೌಲ್ಯ ಸಹ ಬದಲಾವಣೆಯಾಗುತ್ತದೆ. y ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. x ಆ ವಸ್ತುವಿನ ಬೇಡಿಕೆಯ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಈ ಬಿಂಬಕದಲ್ಲಿ y ಮತ್ತು x ಎರಡೂ ಸಹ ಚಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು. ಅವೆರಡರ ಪ್ರಮಾಣವೂ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತದೆ.

1.2 ಬಿಂಬಕ ಸಂಬಂಧ

ಮೇಲಿನ ಬಿಂಬಕ, ಬೆಲೆ ಮತ್ತು ಬೇಡಿಕೆ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ನಡುವಣ ಬಿಂಬಕ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ ಅಷ್ಟೆ. ಬೆಲೆ ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ, ಬೇಡಿಕೆಯೂ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆಯೇ ಅಥವಾ ಅದು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆಯೇ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಈ ಬಿಂಬಕ ತಿಳಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಇದನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕಾದರೆ ಬಿಂಬಕದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸ್ವರೂಪಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂಬಕ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

$$Qd = 25 - 10p$$

ಇಲ್ಲಿ Qd ಬೇಡಿಕೆ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಮತ್ತು p ವಸ್ತುವಿನ ಪ್ರತಿ ಘಟಕದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಇದು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂಬಕ. ಸರಕಿನ ಬೇಡಿಕೆ ಮತ್ತು ಬೆಲೆಗೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಇದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಬೆಲೆ ರೂ. 1 ಇದ್ದರೆ ಬೇಡಿಕೆಯ ಪ್ರಮಾಣ 15 ಘಟಕದಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ. ಬೆಲೆ ರೂ. 2 ಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚಾದರೆ ಬೇಡಿಕೆ ಪ್ರಮಾಣ 5 ಘಟಕಕ್ಕೆ ಇಳಿಯುತ್ತದೆ ಇತ್ಯಾದಿ. ಹೀಗೆ ಬೇಡಿಕೆ ಮತ್ತು ಬೆಲೆಗಳ ನಡುವಣ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಈ ಬಿಂಬಕ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತದೆ.

1.3 ಸರಳ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕ (Linear function)

ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಎರಡು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅವುಗಳೆಂದರೆ ಸರಳ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕಗಳು (Linear functions) ಮತ್ತು ವಕ್ರ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕಗಳು (Non linear functions). ಎರಡು ಚಲಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಲೀನಿಯರ್ ಫಂಕ್ಷನ್ ಸರಳ ರೇಖೆ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ ವಕ್ರ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕಗಳು, ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ವಿವಿಧ ರೀತಿಯ ವಕ್ರ ರೇಖೆ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ.

1.4 ಬಿಂಬಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಚಲಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳಿವೆ.

1. $Ax + By + C = 0$ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಸಮೀಕರಣ ಇಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಎರಡು ಚಲಗಳು. A, B ಮತ್ತು C ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳು.

   ಉದಾಹರಣೆಗೆ : $8x + 9y + 10 = 0$ ಎನ್ನುವುದು ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕ.

2. $$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

   ಇದು ದ್ವಿಬಿಂದು ರೂಪ (Two point form)

   ಇಲ್ಲಿ x, y ಚಲಗಳಾದರೆ, $(x_1\, y_1)$ $(x_2\, y_2)$ ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು.

   ಉದಾಹರಣೆಗೆ :

   $\dfrac{x-5}{6-5} = \dfrac{y-4}{3-4}$ ಎನ್ನುವುದು ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆ.

   ಇಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಚಲಗಳಾದರೆ, (5, 4) ಮತ್ತು (6, 3) ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು.

3. $y = mx + c$

ಇದು ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಓಟದ ಗತಿ (slope) ರೂಪ. ಇಲ್ಲಿ x, y ಚಲಗಳು. m ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಓಟದ ಗತಿಯನ್ನು ಮತ್ತು C ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕವಾಗಿದ್ದು, ಅದು ಸರಳ ರೇಖೆ OY - ಅಕ್ಷವನ್ನು ಎಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ : $Y = 8x + 10$, ಎನ್ನುವ ಬಿಂಬಕ ಸರಳ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕವಾಗಿದ್ದು, ಇದರಲ್ಲಿ y - ಅವಲಂಬಿ ಚಲವಾಗಿದ್ದು x, ಸ್ವತಂತ್ರ ಚಲವಾಗಿದ್ದು, 8 ಎನ್ನುವುದು ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಓಟದ ಗತಿಯಾಗಿದ್ದು, 10 ಎನ್ನುವುದು y - ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಅಂಶವಾಗಿದೆ.

4. $^{X}/a + ^{Y}/b = 1$ ರೇಖಾಂತರ ರೂಪ (Intercept form). ಸರಳ ರೇಖೆ ಈ ಬಿಂಬಕ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವಾಗ, x ಮತ್ತು y ಗಳು ಚಲಗಳಾಗಿದ್ದು, a ಮತ್ತು b ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳಾಗಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ : $^{X}/_{10} + ^{Y}/_{5} = 1$ ಎನ್ನುವುದು ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕ.

ಮೇಲಿನ 4 ಸರಳ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕಗಳು ಬೇರೆ-ಬೇರೆಯಾಗಿ ಕಂಡರೂ, ಒಂದು ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿರುವುದನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ರೂಪಕ್ಕೆ ಸುಲಭವಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ :

$5x + 4y - 10 = 0$ ಎನ್ನುವ ಸ್ವರೂಪದ ಸರಳ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಇದನ್ನು ನಾವು ,

$4y = 10 - 5x$

ಅಥವಾ $y = 10/4 - 5/4\ x$

ಅಥವಾ $Y = ^{5}/_{2} - ^{5}/_{4x}$ ಎನ್ನುವ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಆಗ $ax + by + c = o$ ಎನ್ನುವ ಸ್ವರೂಪದ ಬಿಂಬಕವನ್ನು $y = mx + c$ ಎನ್ನುವ ರೂಪಕ್ಕೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿದಂತಾಯಿತು.

ಮೇಲಿನ ನಾಲ್ಕು ರೀತಿಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತವೆ, ಎನ್ನುವುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಯಿತು. ಆದರೆ, ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ರಚಿಸುವ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಮತ್ತು ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ತುಂಬಾ ಸುಲಭವಾಗಿ ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ, $y = mx + c$ ಎನ್ನುವ ಓಟದ ಗತಿ ರೂಪದ ಬಿಂಬಕ ತುಂಬಾ ಉಪಯುಕ್ತ. ಎರಡು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ;

1.5 ಸರಳ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕಕ್ಕೆ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

$Y = 10x + 8$

ಎಂಬ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ,

y - ಅವಲಂಬಿ ಚಲ

x - ಸ್ವತಂತ್ರ ಚಲ

10 - ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟದ ಗತಿ

8 - ಸರಳ ರೇಖೆ oy - ಅಕ್ಷವನ್ನು ಭೇದಿಸುವ ಅಂಶ.

ಓಟದ ಗತಿ ಎಂದರೇನು ?

ಓಟದ ಗತಿ ಎಂದರೆ, ಸ್ವತಂತ್ರ ಚಲ x ಒಂದು ಘಟಕದಷ್ಟು ಬದಲಾದಾಗ ಅವಲಂಬಿ ಚಲ y ಎಷ್ಟು ಘಟಕದಷ್ಟು ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಇದನ್ನು $\triangle y/\triangle x$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ $\triangle y/\triangle x$ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಓಟದ ಗತಿಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಓಟದ ಗತಿ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರಬಹುದು, ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರಬಹುದು, ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿರಬಹುದು ಅಥವಾ ಅನಂತವಾಗಿರಬಹುದು. ಓಟದ ಗತಿ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿದ್ದರೆ, ಸರಳ ರೇಖೆ ಎಡದಿಂದ ಬಲಕ್ಕೆ ಮೇಲಕ್ಕೇರುತ್ತದೆ. ಅದು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿದ್ದರೆ, ಸರಳ ರೇಖೆ ಎಡದಿಂದ ಬಲಕ್ಕೆ ಕೆಳಗಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಅದು ಶೂನ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ ಸರಳ ರೇಖೆ, oy - ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅದು ಅನಂತವಾಗಿದ್ದರೆ, ಸರಳ ರೇಖೆ ox - ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಮೇಲಿನ ಬಿಂಬಕದಲ್ಲಿ 10 ಎನ್ನುವುದು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಸರಳ ರೇಖೆ ಎಡದಿಂದ ಬಲಕ್ಕೆ ಮೇಲಕ್ಕೇರುತ್ತದೆ. x ಚಲ ಒಂದು ಘಟಕದಷ್ಟು ಬದಲಾದಾಗ, y 10 ಘಟಕದಷ್ಟು ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಸರಳ ರೇಖೆ oy - ಅಕ್ಷವನ್ನು 8 ರಲ್ಲಿ ಭೇದಿಸಿ, ಎಡದಿಂದ ಬಲಕ್ಕೆ ಮೇಲಕ್ಕೇರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ - 2 :

$$y = -5x + 10$$

ಎನ್ನುವ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ, ಇಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಚಲಗಳು. Y - ಅವಲಂಬಿ ಚಲ ಮತ್ತು x ಸ್ವತಂತ್ರ ಚಲ. ಈ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಓಟದ ಗತಿ - 5, ಅಂದರೆ x ಚಲ ಒಂದು ಘಟಕದಷ್ಟು ಬದಲಾದಾಗ y, 5 ಘಟಕಗಳಷ್ಟು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಸರಳ ರೇಖೆ y - ಅಕ್ಷವನ್ನು 10 ರಲ್ಲಿ ಭೇದಿಸಿ ಎಡದಿಂದ ಬಲಕ್ಕೆ 5ರ ದರದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಹೀಗೆ ಸರಳ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕವನ್ನು $y = mx + c$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದರಿಂದ ತುಂಬಾ ಅನುಕೂಲಗಳಿವೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು. ಇದರಿಂದ ಸರಳ ರೇಖೆ y - ಅಕ್ಷವನ್ನು ಎಲ್ಲಿ ಭೇದಿಸುತ್ತಿದೆ, ಅದರ ಓಟದ ಗತಿ ಎಷ್ಟು ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಜೊತೆಗೆ ಅದರ ನಕ್ಷಾ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿ ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

1.6 ಸರಳರೇಖೆ ಬಿಂಬಕ ಮತ್ತು ವಕ್ರ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕಗಳು

$y = mx + c$ ಎನ್ನುವ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂಬಕ ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ನೋಡಿದೆವು. ಸರಳ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕದ ಮುಖ್ಯ ಲಕ್ಷಣವೆಂದರೆ ಸ್ವತಂತ್ರ ಚಲ ಒಂದು ಘಟಕದಷ್ಟು ಬದಲಾದಾಗ, ಅದರೊಡನೆ ಸಂಬಂಧವಿರುವ ಅವಲಂಬಿ ಚಲ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

$$Qd = 10 - 2p$$

ಇದು ಒಂದು ಬೇಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕ. ಇದು $y = mx + c$ ಎನ್ನುವ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ ಇದು ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕ ಸಹ. ಇಲ್ಲಿ Qd ಎನ್ನುವುದು ಬೇಡಿಕೆ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು p ಎನ್ನುವುದು ಬೆಲೆಯನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಬಿಂಬಕದಲ್ಲಿ p - ಸ್ವತಂತ್ರ, ಚಲ, Qd - ಅವಲಂಬಿ ಚಲ. ಈ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಓಟದ ಗತಿ 2 ಮತ್ತು ಈ ಸರಳ ರೇಖೆ 10 ರ ಅಂಶದಲ್ಲಿ y - ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುತ್ತಿದೆ. ಸ್ವತಂತ್ರ ಚಲ, 1 ಘಟಕದಷ್ಟು ಬದಲಾದಾಗ, ಅದಕ್ಕೆ ಪ್ರತಿಕ್ರಯಿಸಿ ಅವಲಂಬಿ ಚಲ 2 ಘಟಕದಷ್ಟು ಬದಲಾಗುತ್ತಿದೆ. ಈ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತದೆ.

$$Qd = 10 - 2p$$

P	Qd
0	10
1	8
2	6
3	4

ಈ ಬಿಂಬಕ ಸಂಬಂಧದಲ್ಲಿ ನಾವು ಗಮನಿಸುವ ಮುಖ್ಯ ಅಂಶವೆಂದರೆ, ಬೆಲೆ ಒಂದೊಂದು ಘಟಕದಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಾದಾಗ, ಬೇಡಿಕೆಯ ಪ್ರಮಾಣ 2 ಘಟಕಗಳಷ್ಟು ಕಡಿಮೆಯಾಗಿದೆ. ಇಂತಹ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಬಂಧವಿರುವ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಸರಳ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಎರಡು ಚಲಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಈ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಮೂಡಿಸಿದಾಗ, ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆ ವ್ಯಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ನಾವು ಮಾರುಕಟ್ಟೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸರಕಿನ ಬೆಲೆ ಮತ್ತು ಬೇಡಿಕೆಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಗಮನಿಸಿದರೆ, ಅದು ಮೇಲಿನ ರೀತಿಯ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಬದಲಿಗೆ ಬೆಲೆ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾದಂತೆ ಬೇಡಿಕೆಯ ಪ್ರಮಾಣ, ಬೇರೆ - ಬೇರೆ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಸ್ವತಂತ್ರ ಚಲ ಮತ್ತು ಅವಲಂಬಿ ಚಲಗಳ ನಡುವಣ ಸಂಬಂಧ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪ್ರಮಾಣದ್ದಿಲ್ಲದಿರುವಾಗ, ಅದನ್ನು ವಕ್ರ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕಗಳ ಮೂಲಕವೇ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗಿನ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

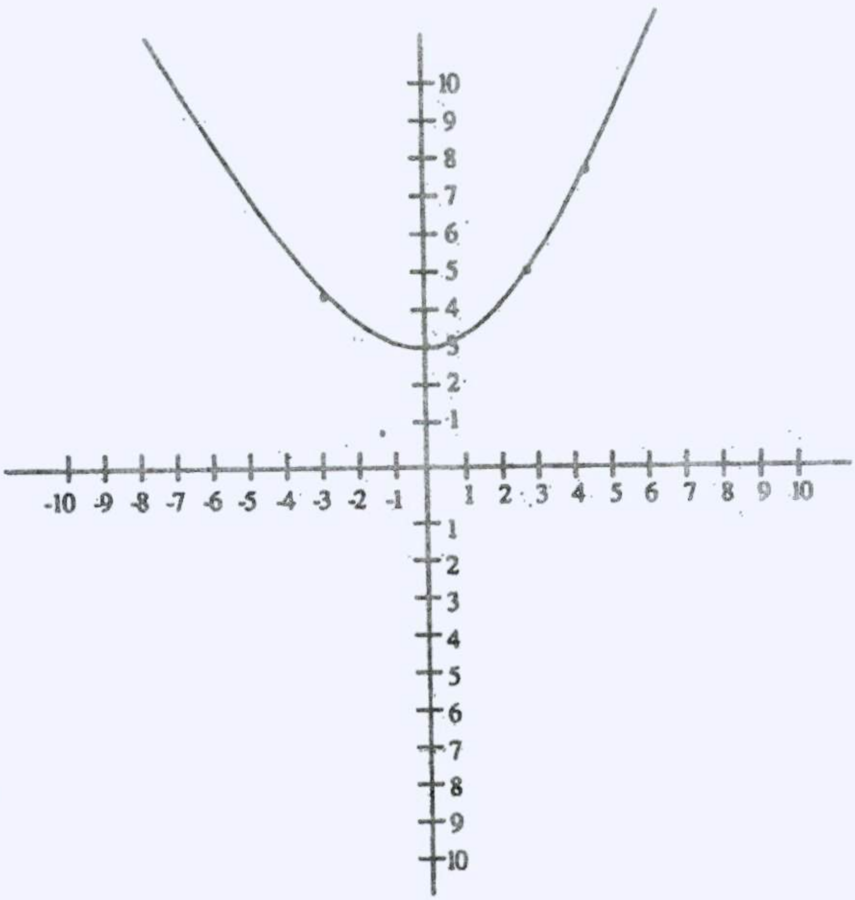
ವಕ್ರ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕ :

$$y = ax^2 + bx + c$$

ಎನ್ನುವ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ನೋಡಿ ಇದನ್ನು ವಕ್ರ ರೇಖಾ ಬಿಂಬಕ ಎಂದು ಗುರುತಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ $y = x^2 + 3$ ಎನ್ನುವ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ ಸ್ವತಂತ್ರ ಚಲ x ಗೆ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ y, ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆಗಳನ್ನು ಅನುಭವಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

x	y
0	3
1	4
2	7
-1	4
-2	7

ಈ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಮೂಡಿಸೋಣ.



ಮೇಲಿನ ರೇಖೆ ಸರಳ ರೇಖೆಯಲ್ಲ ಎನ್ನುವುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಈ ರೇಖೆಯ ಓಟದ ಗತಿ, ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಓಟದ ಗತಿಯಂತೆ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕವೂ ಆಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ವಕ್ರ ರೇಖೆಗಳ ಓಟದ ಗತಿಯನ್ನು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಘಟಕಕ್ಕೂ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬೇಕು.

ಕೆಲವು ವಕ್ರ ರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

(1) $y = ax^2 + bx + c$

ಇಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಗಳು ಚಲಗಳು. abc ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳು. ಇದನ್ನು ಕ್ವಾಡ್ರಾಟ್ರಿಕ್ ಬಿಂಬಕ ಅಥವಾ ಎರಡನೇ ಡಿಗ್ರಿಯ ಬಿಂಬಕ ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ. "ಪ್ಯಾರಾಬೋಲಾ" ಎಂದು ಸಹ ಈ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಗುರುತಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

(2) $(x - h)(y - k) = r^2$

ಇಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಗಳು ಚಲಗಳು. h, k, r ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳು. ಈ ಬಿಂಬಕವನ್ನು "ಹೈಪರ್ ಬೋಲಾ" ಎಂದು ಗುರುತಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಸಹ ಬರೆಯಬಹುದು.

$Ax^2 + cy^2 + Dx\,1 + Ey + f = 0$

'ಈಕ್ವಿಲಾಟರಲ್ ಹೈಪರ್ ಬೋಲಾ' ಬಿಂಬಕ $xy = a^2$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಜನರಲೈಸ್ಡ್ ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾ

$$xy^n = c \ (n>o)$$

ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತವಾಗುತ್ತವೆ.

ಹಾಗೆಯೇ ಮತ್ತೊಂದು ವಕ್ರ ರೇಖಾ ಬಿಂಬಕವೆಂದರೆ ವೃತ್ತ. ಇದು,

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ x, y ಗಳು ಚಲಗಳಾದರೆ r ಸ್ಥಿರಾಂಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಒಂದು ಬಿಂಬಕ,

$ax^2 + 1bx + c = 0$ ಎನ್ನುವ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವಾಗ ಅವ್ಯಕ್ತ ಚಲ **x** ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಳಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

$$x = \frac{a \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳುವುದು ತುಂಬಾ ಉಪಯುಕ್ತ.

1.7 ಸಂಖ್ಯಾ ವ್ಯವಸ್ಥೆ

ಗಣಿತದ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಬರುವುದು ಸರಿಯಷ್ಟೆ. ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೆಲವು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

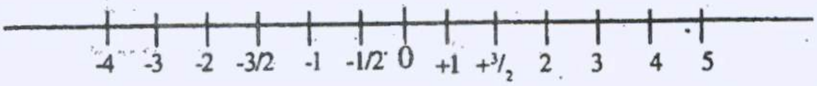
ಸಹಜ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (Natural Numbers) : ಸಂಖ್ಯೆ 1, 2, 3......... ಇತ್ಯಾದಿಗಳನ್ನು ಸಹಜ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಸಹಜ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಲ್ಲ ಧನಾತ್ಮಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಒಳಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಅದು ಋಣಾತ್ಮಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಸೊನ್ನೆ ಮತ್ತು ಭಿನ್ನ ರಾಶಿಯನ್ನು ಒಳಗೊಳ್ಳುವುದಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ : $Q_s = 100p$ ಎನ್ನುವ ನೀಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ P ಬೆಲೆಯನ್ನು, Q_s ನೀಡಿಕೆಯನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತದೆ. P ಬೇರೆ - ಬೇರೆಯಾಗಿರುವ Q_s ಎಷ್ಟಿರುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಈ ಬಿಂಬಕ ಸಂಬಂಧದಿಂದ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು. P ಮತ್ತು Q_s ಗಳೆರಡೂ ಧನಾತ್ಮಕ ಸಂಬಂಧ ಹೊಂದಿರುವುದರಿಂದ ಬರುವ ಉತ್ತರ ಸಹ ನೈಜ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, P = 1000, ಆದರೆ Q_s, 100,000 ಆಗುತ್ತದೆ. ಆಗ P, Q_s ಗಳೆರಡೂ ಸಹಜ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಭಿನ್ನ ರಾಶಿ : ಭಿನ್ನ ರಾಶಿಯ ಪರಿಚಯ ನಿಮಗೆಲ್ಲರಿಗೂ ಇದೆ. ಇದು ಎರಡು ಸಹಜ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ. ಮೇಲೆ ನಮೂದಿತವಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 'ನ್ಯೂಮರೇಟರ್' ಎಂದೂ ಕೆಳಗೆ ನಮೂದಿತವಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 'ಡಿನಾಮಿನೇಟರ್' ಎಂದೂ ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ***ಉದಾಹರಣೆಗೆ ;*** $^4/_5$ ಎನ್ನುವುದು ಒಂದು ಭಿನ್ನ ರಾಶಿ. 4 ಎನ್ನುವುದು ಯಾವಾಗಲೂ 5 ರ ಒಂದು ಭಾಗವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಚಿಹ್ನೆ ಹೊಂದಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ : ಪ್ರತಿ ಸಹಜ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಭಿನ್ನ ರಾಶಿಗೆ ಒಂದು ಚಿನ್ಹೆ ಲಗತ್ತಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅದು ಧನಾತ್ಮಕ (+) ವಾಗಿರಬಹುದು ಅಥವಾ ಋಣಾತ್ಮಕ (-)ವಾಗಿರಬಹುದು. ***ಉದಾಹರಣೆಗೆ :*** +4, -4, 1/2, -1/2 ಇತ್ಯಾದಿ.

ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು : +1, +2, +3 ಮತ್ತು -1, -2, -3 ಮುಂತಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳೆಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಧನಾತ್ಮಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಬಹುದು ಅಥವಾ ಋಣಾತ್ಮಕ ವಾಗಬಹುದು. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾಪಟ್ಟಿಯ ಮೇಲೆ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸೂಚಿಸಬಹುದು.



ರ್‍ಯಾಷನಲ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು : ಎಲ್ಲ ಧನಾತ್ಮಕ ಮತ್ತು ಋಣಾತ್ಮಕ ಭಿನ್ನ ರಾಶಿಗಳ ಸಮೂಹವನ್ನು ರ್‍ಯಾಷನಲ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಪ್ರತಿ ರ್‍ಯಾಷನಲ್ ಸಂಖ್ಯೆ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಭಿನ್ನ ರಾಶಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ : $^2/_3$, $^{-4}/_3$, $^{-9}/_4$ ಇವು ರ್‍ಯಾಷನಲ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಇರ್‍ರ್‍ಯಾಷನಲ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು : ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಗೊಳಿಸಲಾಗದ ಆದರೆ ಸಂಖ್ಯಾ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ನಮೂದಿಸಬಹುದಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಇರ್‍ರ್‍ಯಾಷನಲ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $\sqrt{2}$ ಇದನ್ನು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವುದಕ್ಕಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಸಂಖ್ಯಾ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ 0 ಯಿಂದ ಇದು ಎಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ತೋರಿಸಬಹುದು. $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, ಇವೆಲ್ಲವೂ ಇರ್‍ರ್‍ಯಾಷನಲ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ನೈಜ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು : ರ್‍ಯಾಷನಲ್ ಮತ್ತು ಇರ್‍ರ್‍ಯಾಷನಲ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆರಡರ ಸಮೂಹವನ್ನು ನೈಜ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ದಶಮಾಂಶ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು : 0.53, 10.23 ಮುಂತಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ದಶಮಾಂಶ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದು ಹೆಸರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ದಶಮಾಂಶ ಸಂಖ್ಯೆ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಘಟ್ಟದಲ್ಲಿ ಮುಕ್ತಾಯಗೊಂಡರೆ ಅದನ್ನು ರ್‍ಯಾಷನಲ್ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು. ***ಉದಾಹರಣೆಗೆ,*** $^{254}/_{100} = 2.54$. ಆದರೆ ದಶಮಾಂಶ ಸಂಖ್ಯೆ ಮುಕ್ತಾಯಗೊಳ್ಳದೇ ಇರಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $^1/_7 = 0.1428714$ .....

ಒಂದೊಂದು ಬ್ಲಾಕ್ ಆಗಿ ಪುನರಾವರ್ತವಾಗುವ ದಶಮಾಂಶ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಿರಿಯಾಡಿಕ್ ದಶಮಾಂಶ ಸಂಖ್ಯೆಯೆಂದೂ, ಕೊನೆಗೊಳ್ಳದೇ ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನಾನ್ ಪಿರಿಯಾಡಿಕ್ ಸಂಖ್ಯೆಯೆಂದೂ ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ. **ಉದಾಹರಣೆಗೆ ;** $^1/_7 = 0.142857142857$. ಇದು ಪಿರಿಯಾಡಿಕ್ ದಶಮಾಂಶ ಸಂಖ್ಯೆ. $^2/_3 = 0.6666$.... ಇದು ನಾನ್ ಪಿರಿಯಾಡಿಕ್ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಜಟಿಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು : ನೈಜ ಹಾಗೂ ಕಲ್ಪನಾತ್ಮಕ ಭಾಗಗಳೆರಡನ್ನೂ ಹೊಂದಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಜಟಿಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇವು $(a+bi)$ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ. ಇಲ್ಲಿ a ಎನ್ನುವುದು ನೈಜ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಭಾಗ ಮತ್ತು bi ಕಲ್ಪನಾತ್ಮಕ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಭಾಗ. ಆದ್ದರಿಂದ $\sqrt{-7}$ ಅನ್ನು $\sqrt{7}$ x i ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಈ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ $\sqrt{-4} = \sqrt{4}$ x $i = 2i$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

1.8 ಸಾರಾಂಶಿಸೋಣ

ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನೀವು ಬಿಂಬಕದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ನೋಡಿದ್ದೀರಿ. ಬಿಂಬಕ ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚಿನ ಚಲಗಳ ನಡುವೆ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸುತ್ತದೆ. ಜೊತೆಗೆ ಸರಳ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕದ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ. ಯಾವುದೇ ಸರಳ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕವನ್ನು $Ax + By + C = 0$ ಎನ್ನುವ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು. ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಸರಳ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ $y = mx + c$ ಎನ್ನುವ ಓಟದ ಗತಿ ಬಿಂಬಕ ತುಂಬಾ ಪ್ರಯೋಜನಕಾರಿಯಾದದ್ದು ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ. ಹೆಚ್ಚಿನ ಆರ್ಥಿಕ ಸಂಬಂಧಗಳು ಸರಳ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕ ಸ್ವರೂಪದ್ದಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಬದಲಿಗೆ ಅದು ವಕ್ರ ರೇಖಾ ಸ್ವರೂಪದ್ದಾಗಿರುತ್ತದೆ. ವಕ್ರ ರೇಖಾ ಬಿಂಬಕಗಳಲ್ಲಿ, ಪ್ಯಾರಾಬೋಲಾ, ಹೈಪರ್ ಬೋಲಾ ಮತ್ತು ವೃತ್ತ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಮುಂದಿನ ಪಾಠಗಳಲ್ಲಿ ವಿಸ್ತೃತವಾಗಿ ನೋಡಲಾಗುತ್ತದೆ. ವಕ್ರ ರೇಖಾ ಬಿಂಬಕಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ $ax^2 + bx + c = 0$ ಎನ್ನುವ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಅವ್ಯಕ್ತ ಚಲ x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ಎನ್ನುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡುವುದು ತುಂಬಾ ಮುಖ್ಯ. ಗಣಿತದ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಕ್ಕೆ ಸಂಖ್ಯಾ ವ್ಯವಸ್ಥೆ ತುಂಬಾ ಮುಖ್ಯವಾದುದರಿಂದ ಈ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ಸಹ ಪರಿಚಯಿಸಲಾಗಿದೆ.

1.9 ಮುಖ್ಯ ಪರಿಭಾವನೆಗಳು

ಬಿಂಬಕ - ಬಿಂಬಕ ಸಂಬಂಧ. ಸರಳ ರೇಖೆ ಮತ್ತು ವಕ್ರ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕಗಳು, ಬಿಂಬಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು, ಸಂಖ್ಯಾ ವ್ಯವಸ್ಥೆ.

1.10 ಮುಂದಿನ ಓದಿಗಾಗಿ

1. ಟಿ. ಕೆ. ರೇಣುಕಾರ್ಯ : ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಪರಿಮಾಣಾತ್ಮಕ ವಿಧಾನಗಳು. ಅಧ್ಯಾಯ - 2

1.11 ಮಾದರಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

1. ಬಿಂಬಕ ಸಂಬಂಧ ಎಂದರೇನು ? ಉದಾಹರಣೆಗಳೊಡನೆ ವಿವರಿಸಿ.
2. ಸರಳ ರೇಖೆ ಮತ್ತು ವಕ್ರ ರೇಖಾ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ವ್ಯತ್ಯಸಿಸಿ.
3. ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂಬಕಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಸರಳ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕ ಮತ್ತು ಯಾವುದು ವಕ್ರ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕ, ವ್ಯತ್ಯಯಿಸಿ.

(i) $x + y - 8 = 0$

(ii) $x^2 + y^2 = 15$

(iii) $x = y^2 + y$

(iv) $x - 10 = y + 4$

(v) $2x^2 + 3x + 8 = 0$

******

ಘಟಕ - 2 : ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಸರಳ ರೇಖಿ ಬಿಂಬಕಗಳ ಅನ್ವಯ

ರಚನೆ :

2.1 ಪ್ರಸ್ತಾವನೆ

2.2 ಸರಳ ರೇಖಿ ಬಿಂಬಕಗಳ ಉಪಯೋಗಗಳು

2.3 ಬೇಡಿಕೆ ಮತ್ತು ನೀಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕಗಳು

2.4 ಮಾರುಕಟ್ಟೆ ಸಮತೋಲನ

2.5 ಮಾರುಕಟ್ಟೆ ಸಮತೋಲನದ ಮೇಲೆ ತೆರಿಗೆ ಪರಿಣಾಮ

2.6 ಮಾರುಕಟ್ಟೆ ಸಮತೋಲನದ ಮೇಲೆ ಸಹಾಯಧನದ ಪರಿಣಾಮ

2.7 ಸಾರಾಂಶಿಸೋಣ

2.8 ಮುಂದಿನ ಓದಿಗಾಗಿ

2.1 ಪ್ರಸ್ತಾವನೆ

ಹಿಂದಿನ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನಾವು ಬಿಂಬಕ ಸಂಬಂಧದ ಬಗ್ಗೆ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದೆವು. ಸರಳ ರೇಖೆ ಮತ್ತು ವಕ್ರ ರೇಖೆ ಗಳ ನಡುವಣ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಸಹ ನೋಡಿದೆವು. ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ಸರಳ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಬಳಸುವ ಕೆಲವು ಕ್ಷೇತ್ರಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರ ಬಗ್ಗೆ ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ಅಂಶವೆಂದರೆ, ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗುವ ಎಲ್ಲ ಆರ್ಥಿಕ ಕ್ರಿಯೆಗಳ ನಡುವಣ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸರಳ ರೇಖೆ ಅಥವಾ ವಕ್ರ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕಗಳ ಸಂಬಂಧವಾಗಿ ಏರ್ಪಡಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದ ಎಲ್ಲ ವಿಭಾಗಗಳಲ್ಲೂ ಸರಳ ರೇಖೆ ಮತ್ತು ವಕ್ರ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಬಳಸುವುದು ಸಾಧ್ಯ. ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ಸರಳ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕದ ಕೆಲವು ಬಳಕೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಮಾರುಕಟ್ಟೆ ಸಮತೋಲನಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

2.2 ಸರಳ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕಗಳ ಉಪಯೋಗಗಳು

ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚಿನ ಚಲಗಳ ನಡುವೆ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪ್ರಮಾಣದ ಸಂಬಂಧವಿದ್ದರೆ, ಅದು ಸರಳ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕದ ಮೂಲಕ ವ್ಯಕ್ತಗೊಳ್ಳಲು ಅರ್ಹವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಈ ಹಿಂದೆ ಗಮನಿಸಿದ್ದೇವೆ.

$Y = mx + c$ ರೂಪದ ಸರಳ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕದಲ್ಲಿ m ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಓಟದ ಗತಿಯನ್ನು ಪ್ರತಿಬಿಂಬಿಸುತ್ತಿದ್ದು, ಅದು ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕವಾಗಿದ್ದು, x ಬದಲಾದಾಗಲೆಲ್ಲಾ y, m ಪ್ರಮಾಣದಷ್ಟು ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, x ಮತ್ತು y ಚಲಗಳ ನಡುವೆ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪ್ರಮಾಣದ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವಾಗಲೆಲ್ಲಾ ಸರಳ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು ಎನ್ನುವುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾದಂತಾಯಿತು. ಹೀಗಾಗಿ ಆರ್ಥಿಕ ಕ್ರಿಯೆಗಳ ನಡುವೆ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲು ಸರಳ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು.

ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಸರಳ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ತುಂಬಾ ವ್ಯಾಪಕವಾಗಿ ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ತುಂಬಾ ಸರಳ ನಿರೂಪಣೆ ಸಾಧ್ಯವಿರುವುದು ಇದಕ್ಕೆ ಮುಖ್ಯ ಕಾರಣ. ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದ ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕಗಳಲ್ಲಿ ನೀವು ನೋಡುವ ಎಲ್ಲಾ ಸರಳ ರೇಖೆ ಚಿತ್ರಗಳ ಹಿಂದೆ, ಸರಳ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕ ಇದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಮರೆಯಬಾರದು. ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೈಕ್ರೋ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರ ಮುಂತಾದ ವಿಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ನೀವು ತುಂಬಾ ಸರಳ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ರಚಿತವಾಗಿರುವ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ನೋಡುತ್ತೀರಿ. ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ಕೆಲವು ಮುಖ್ಯವಾದ ಸರಳ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಪರಿಶೀಲಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅವುಗಳೆಂದರೆ, (1) ಬೇಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕ (2) ನೀಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕ (3) ಸರಳ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕಗಳ ಮೂಲಕ ಮಾರುಕಟ್ಟೆ ಸಮತೋಲನ (4) ಸರ್ಕಾರ ತೆರಿಗೆ ವಿಧಿಸುವುದರಿಂದ ಮಾರುಕಟ್ಟೆ ಸಮತೋಲನದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಬದಲಾವಣೆಗಳು ಮತ್ತು (5) ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ವರಮಾನದಲ್ಲಿ ಸಮತೋಲನ.

2.3 ಬೇಡಿಕೆ ಮತ್ತು ನೀಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕಗಳು

ಮೊದಲು ನಾವು ಬೇಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಬೇಡಿಕ ನಿಯಮದ ಪ್ರಕಾರ, ಯಾವುದೇ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸರಕಿನ ಬೆಲೆ ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ, ಅದರ ಬೇಡಿಕೆಯ ಪ್ರಮಾಣ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ. ಬೆಲೆ ಮತ್ತು ಬೇಡಿಕೆಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ನಡುವೆ ಸರಳ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕ ಸಂಬಂಧವಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ ನಾವು ಇವೆರಡು ಚಲಗಳ ನಡುವಣ ಸಂಬಂಧವನ್ನು $Y = mx + c$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಕ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು. ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಿ.

$$D = 10 - 2p$$

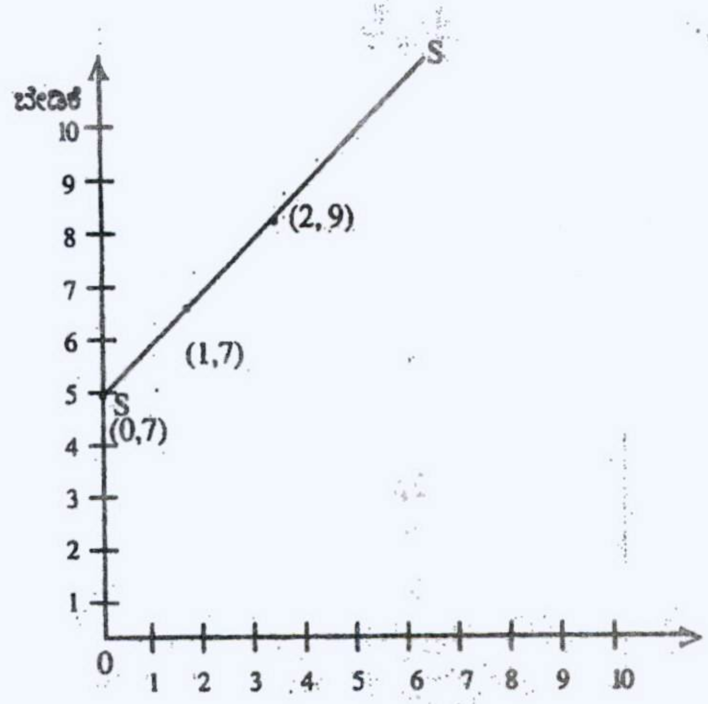
ಇಲ್ಲಿ P, ಒಂದು ಸರಕಿನ ಪ್ರತಿ ಘಟಕದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಮತ್ತು D ಬೇಡಿಕೆಯ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತಿವೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಈ ಬಿಂಬಕ $Y = mx + c$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ, ಇದು ಸರಳ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕ. ಇಲ್ಲಿ D ಅವಲಂಬಿ ಚಲ, P, ಸ್ವತಂತ್ರ ಚಲ ಮತ್ತು ಈ ಮೊದಲೇ ಸೂಚಿಸಿದಂತೆ, ಇಲ್ಲಿ D ಮತ್ತು P ಎರಡು ಚಲಗಳಿವೆ. ಈ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಓಟದ ಗತಿ (-2). ಅಂದರೆ ಬೆಲೆ ಒಂದು ಘಟಕದಷ್ಟು ಬದಲಾದಾಗ, ಬೇಡಿಕೆ 2 ಘಟಕಗಳಷ್ಟು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ. 10 ಎನ್ನುವುದು ಸ್ಥಿರಾಂಕವಾಗಿದ್ದು, ಅದು ಬೇಡಿಕೆಯ ಬಿಂಬಕ oy - ಅಕ್ಷವನ್ನು ಎಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ನೀಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕ : ಈಗ ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ ;

$$S = 2p + 5$$

ಇಲ್ಲಿ S ಎನ್ನುವುದು ನೀಡಿಕೆಯ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಮತ್ತು P ಎನ್ನುವುದು ಪ್ರತಿ ಘಟಕದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಇದರ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ನೋಡೋಣ :

ಬೆಲೆ	ಬೇಡಿಕೆ
0	5
1	7
2	9



SS ಸರಳ ರೇಖೆ ನೀಡಿಕೆದರ ಓಟದ ಗತಿ +2. ಅಂದರೆ ಬೆಲೆ ಒಂದು ಘಟಕದಷ್ಟು ಬದಲಾದಾಗ ನೀಡಿಕೆ 2 ಘಟಕಗಳಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ.

2.4 ಮಾರುಕಟ್ಟೆ ಸಮತೋಲನ

ಬೇಡಿಕೆ ಮತ್ತು ನೀಡಿಕೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮನಾಗಿರುವಾಗ ಮಾರುಕಟ್ಟೆ ಸಮತೋಲನ ಬೆಲೆ ಮತ್ತು ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಏರ್ಪಡುತ್ತವೆ ಎನ್ನುವುದು ತಿಳಿದಿದೆ. ಈಗ ಬೇಡಿಕೆ ಮತ್ತು ನೀಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

$$Q_d = 100 - 2p \text{.... (1)}$$

$$Q_s = 50 + 3p \text{ .... (2)}$$

ಇಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯ ಸಮೀಕರಣ ಬೇಡಿಕೆಯನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತದೆ. ಸಮೀಕರಣ (2) ನೀಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತದೆ. Q_d ಮತ್ತು Q_s ಅನ್ನು x ಎಂದು ನಮೂದಿಸೋಣ. ಆಗ ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳು,

$x = 100 - 2p$ ಮತ್ತು

$x = 50 + 3p$ ಆಗುತ್ತವೆ.

ಬೇಡಿಕೆ ಮತ್ತು ನೀಡಿಕೆ ಪರಸ್ಪರ ಸಮನಾಗಿರುವಾಗ ಸಮತೋಲನ ಬೆಲೆ ಮತ್ತು ಪ್ರಮಾಣ ಏರ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮತೋಲನದಲ್ಲಿ

$Q_d = Q_s$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಸಮೀಕರಣ 1ನ್ನು 2ರೊಡನೆ ಸಮಗೊಳಿಸಿದಾಗ,

$100 - 2p = 50 + 3p$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಅಥವಾ $-2p - 3p = -100 + 50$

$-5P = -100 + 50$

$-5P = -50$

$5P = 50$

$P = 10$

ಇದು ಸಮತೋಲನ ಬೆಲೆ. ಇದನ್ನು $\overline{p}$ ಎಂದು ನಮೂದಿಸೋಣ. P ಯ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣ 1 ರಲ್ಲಿ ಹಾಕಿದಾಗ,

$x = 100 - 2p$

ಯಲ್ಲಿ $x = 100 - 2 \times 10$

$x = 100 - 20 = 80$

$x = 80$ ಆಗುತ್ತದೆ.

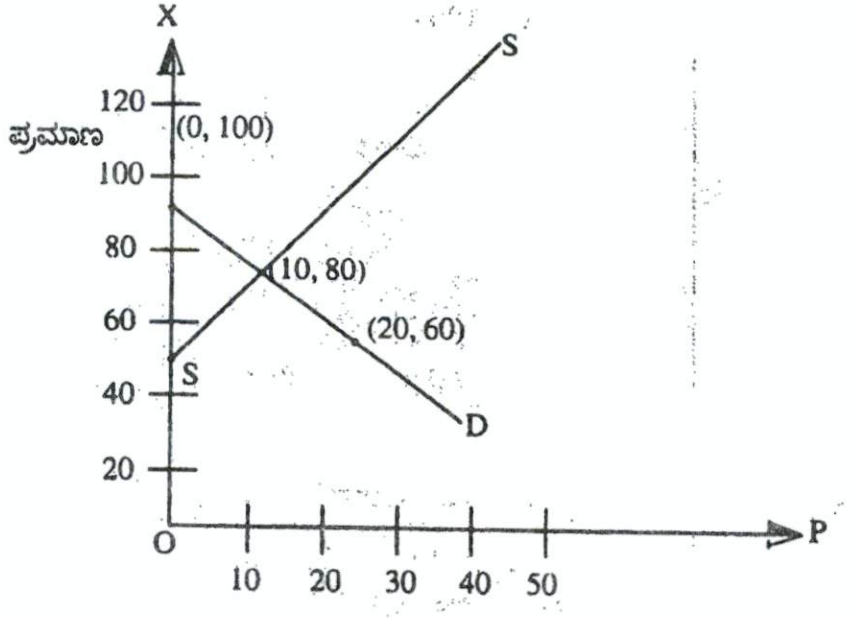
ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮತೋಲನ ಬೇರೆ. $\overline{p} = 10$ ಮತ್ತು $\overline{x} = 80$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದರ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ರಚಿಸಬಹುದು.

$X = 100 - 2p$

p	x
0	50
10	80
20	60

$X = 50 + 3p$

p	x
0	50
10	80
20	110



ಮೇಲಿನ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ನಾವು ನೋಡುವಂತೆ, ಬೆಲೆ ರೂ. 10 ಮತ್ತು ಬೇಡಿಕೆ - ನೀಡಿಕೆಗಳ ಪ್ರಮಾಣ 80 ರಲ್ಲಿ ಸಮತೋಲನ ಏರ್ಪಡುತ್ತವೆ. ನಕ್ಷಾ ನಿರೂಪಣೆ ನಾವು ಬೀಜಗಣಿತದ ಮೂಲಕ ಕಂಡುಹಿಡಿದ ಉತ್ತರಗಳಿಂದ ಸ್ವತಂತ್ರವಾದುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸಬೇಕು.

2.5 ಮಾರುಕಟ್ಟೆ ಸಮತೋಲನದ ಮೇಲೆ ತೆರಿಗೆ ಪರಿಣಾಮ

ಒಂದು ಸರಕಿನ ಮೇಲೆ ಸರ್ಕಾರ ತೆರಿಗೆ ವಿಧಿಸಿದಾಗ ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಅದರ ಬೆಲೆ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ. ಬೆಲೆ ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದರಿಂದ ಬೇಡಿಕೆಯ ಪ್ರಮಾಣ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಸರ್ಕಾರ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ವಿಧಿಸಿದಾಗ ಸರ್ಕಾರಕ್ಕೆ ಅದರಿಂದ ಆದಾಯ ಬರುತ್ತದೆ. ಸರ್ಕಾರ ಸರಕನ್ನು ಉತ್ಪಾದಿಸುವವನ ಮೇಲೆ ತೆರಿಗೆ ಹಾಕಿದರೆ, ಆ ಸರಕಿನ ಬೇಡಿಕೆ ಸ್ಥಿತಿ ಸ್ಥಾತಕತ್ವವನ್ನಾಧಾರಿಸಿ, ತೆರಿಗೆಯ ಒಂದು ಭಾಗವನ್ನು ಉತ್ಪಾದಕ, ಅನುಭೋಗಿಗಳಿಗೆ ವರ್ಗಾಯಿಸುತ್ತಾನೆ. ಅಂದರೆ ತೆರಿಗೆಯ ಒಂದು ಭಾಗವನ್ನು ಉತ್ಪಾದಕ, ಮತ್ತೊಂದು ಭಾಗವನ್ನು ಅನುಭೋಗಿ ಹೊರುತ್ತಾನೆ. ಇವೆಲ್ಲ ಪರಿಣಾಮಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯ ಮೂಲಕ ನೋಡೋಣ.

ಬೇಡಿಕೆ ಮತ್ತು ನೀಡಿಕೆ ನಿಯಮಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ,

$$3P + 2x = 27 \;.......\; (1)$$

$$6P - 2x = 9 \;.......\; (2)$$

ಆಗಿವೆ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ P, ಪ್ರತಿ ಘಟಕ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಮತ್ತು x ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ.

ಸರ್ಕಾರ ಪ್ರತಿ ಬೆಲೆ ಘಟಕದ ಮೇಲೆ ಉತ್ಪಾದಕನಿಗೆ ರೂ. 3/2 ರ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ಹಾಕಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಈಗ ತೆರಿಗೆಗೆ ಮುಂಚೆ ಮತ್ತು ತೆರಿಗೆಯ ನಂತರ ಸಮತೋಲನ ಬೆಲೆ ಹಾಗೂ ಸಮತೋಲನ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕೋಣ. ಹಾಗೆಯೇ, ತೆರಿಗೆಯಿಂದ ಆಗುವ ಬೆಲೆ ಏರಿಕೆ, ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿನ ಇಳಿತಾಯ, ಸರ್ಕಾರಕ್ಕೆ ತೆರಿಗೆಯಿಂದ ಬರುವ ವರಮಾನ, ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ಉತ್ಪಾದಕ ಮತ್ತು ಅನುಭೋಗಿ ಹೇಗೆ ಹಂಚಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಾರೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ನೋಡೋಣ;

ತೆರಿಗೆಗೆ ಮುಂಚೆ ಸಮತೋಲನ : ಸಮತೋಲನ ಬೇಡಿಕೆ ಮತ್ತು ನೀಡಿಕೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮನಾದಾಗ ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಬೇಡಿಕೆ ಮತ್ತು ನೀಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಗೊಳಿಸೋಣ.

ಸಮತೋಲನದಲ್ಲಿ ಬೇ = ನೀ

ಬೇಡಿಕೆ ಮತ್ತು ನೀಡಿಕೆಗಳನ್ನು Pಮಾಧ್ಯಮದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸೋಣ.

ಬೇ $3P + 2x = 27$

ಅಥವಾ $3\,P = 27 - 2x$

$$P = {}^{27}/_{3} - {}^{2}/_{3}\,X \;........\; (3)$$

ನೀ : $6p = 9 + 2x$

ಅಥವಾ $6P = 9 + 2x$

ಅಥವಾ $P = {}^{9}/_{6} + {}^{2}/_{6}\,x$

ಅಥವಾ $P = {}^{3}/_{2} + {}^{1}/_{3}\,x$ .... (4)

ಸಮೀಕರಣ 3 ಮತ್ತು 4 ನ್ನು ಸಮಗೊಳಿಸಿದರೆ,

$${}^{27}/_{3} - {}^{2}/_{3}\,x = {}^{3}/_{2} + {}^{1}/_{3}\,x$$

$$9 - {}^{2}/_{3}\,x = {}^{3}/_{2} + {}^{1}/_{3}\,x$$

$$- {}^{2}/_{3}\,x - {}^{1}/_{3}\,x = {}^{3}/_{2} - 9$$

$$- x = - {}^{15}/_{2}$$

$$x = {}^{15}/_{2}$$

$$\bar{x} = 7.5$$

$\bar{x}$ ತೆರಿಗೆಗೆ ಮುಂಚೆ ನಂತರ ಬೇಡಿಕೆಯ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತದೆ $\bar{x}$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣ 3 ರಲ್ಲಿ ಹಾಕಿದರೆ,

$$P = 9 - {}^{2}/_{3}\,x\,{}^{15}/_{2}$$

$$P = 9 - 5 = 4,$$

$$\bar{P} = 4$$

$\bar{P}$ ಸಮತೋಲನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ತೆರಿಗೆಗೆ ಮುಂಚೆ $\boxed{\begin{array}{l} \bar{P} = 4 \\ \bar{x} = 7.5 \end{array}}$

ಈಗ ಸರ್ಕಾರ ಪ್ರತಿ ಬೆಲೆ ಘಟಕದ ಮೇಲೆ ರೂ. ${}^{3}/_{2}$ ರ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ವಿಧಿಸುತ್ತಿದೆ. ಅಂದರೆ ತೆರಿಗೆ ಉತ್ಪಾದಕನ ಮೇಲೆ ವಿಧಿಸಲಾಗುತ್ತಿರುವುದರಿಂದ, ನೀಡಿಕೆಯ ರೇಖೆ ಮೊದಲಿನಂತೆಯೇ ಇರುತ್ತದೆ. ಅದು ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ನೀಡಿಕೆಯ ರೇಖೆ ಮೊದಲಿನಂತೆಯೇ ಇರುತ್ತದೆ. ಅದು ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ನೀಡಿಕೆಯ ಬೆಲೆ ಪ್ರತಿ ಘಟಕಕ್ಕೆ ರೂ. ${}^{3}/_{2}$ ರಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ. ಸಮೀಕರಣ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಬದಲಾವಣೆಗಳು ಆಗುತ್ತವೆ.

ಬೇ : $P = 9 - {}^{2}/_{3}\,x$ .... (5)

ನೀ : $P = {}^{3}/_{2} + {}^{1}/_{3}\,x + ({}^{3}/_{2})$ - ತೆರಿಗೆ

ಅಥವಾ $P = 3 + {}^{1}/_{3}\,x$ ..... (6)

ತೆರಿಗೆಯ ನಂತರ ಸಮತೋಲನದಲ್ಲಿ ಬೇಡಿಕೆ ಮತ್ತು ನೀಡಿಕೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮವಾಗುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮೀಕರಣ (5) ಮತ್ತು (6) ನ್ನು ಸಮಗೊಳಿಸಿದರೆ,

$$9 - {}^{2}/_{3}\,x = 3 + {}^{1}/_{3}\,x$$

$$-{}^{2}/_{3}\,x - {}^{1}/_{3}\,x = -9 + 3$$

$$-x = -6$$

$$\bar{x}_1 = 6$$

$\bar{x}$, ತೆರಿಗೆಯ ನಂತರದ ಬೇಡಿಕೆ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತದೆ. x ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣ 6ಕ್ಕೆ ಹಾಕಿದಾಗ,

$$P = 3 + {}^{1}/_{3} \times 6$$

$$P = 3 + 2$$

$$\bar{P}_1 = 5$$

$\bar{P}_1$ = ತೆರಿಗೆಯ ನಂತರದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ತೆರಿಗೆಯ ನಂತರ,

$$\boxed{\begin{array}{l}\bar{P}_1 = 5 \\ \bar{x}_1 = 6\end{array}}$$

ಈಗ ತೆರಿಗೆಯ ಪರಿಣಾಮಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ

ತೆರಿಗೆಯಿಂದ ಬೆಲೆ ಏರಿಕೆ = $\{\overline{P_1} - \bar{P}\}$

$$= 5 - 4 = 1$$

ತೆರಿಗೆಯ ಪರಿಣಾಮವಾಗಿ ಬೇಡಿಕೆಯಲ್ಲಿನ ಇಳಿತಾಯ.

$$= \{\bar{x} - \bar{x}_1\}$$

$$= \{7.5 - 6\} = 1.5$$

ಸರ್ಕಾರಕ್ಕೆ ತೆರಿಗೆಯಿಂದ ವರಮಾನ = $t \cdot \overline{x_1}$

ಇಲ್ಲಿ 't' ತೆರಿಗೆಯ ದರವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ

$${}^{3}/_{2} \times 6 = 9$$

ಈ ಮೊದಲೇ ಹೇಳಿದಂತೆ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ಉತ್ಪಾದಕ ಮತ್ತು ಅನುಭೋಗಿ ಇಬ್ಬರೂ ಹಂಚಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಾರೆ. ಇದು ಹೇಗೆಂದು ನೋಡೋಣ.

ತೆರಿಗೆಯ ದರ - ರೂ. ${}^{3}/_{2}$

ಆದರೆ ತೆರಿಗೆಯಿಂದ ಬೆಲೆ ಏರಿಕೆ - ರೂ. 1

ಅಂದರೆ, ರೂ. $^3/_2$ ರ ತೆರಿಗೆಯಲ್ಲಿ - ಅನುಭೋಗಿಯ ಹಿಸ್ಸೆ ರೂ. 1

ಒಂದು ಪಕ್ಷ ತೆರಿಗೆ ರೂ. 100 ಆದರೆ - ಅನುಭೋಗಿಯ ಹಿಸ್ಸೆ

$$\frac{1}{^3/_2} \times 100$$

$$= {}^2/_3 \times 100 = {}^{200}/_3 = 66.3\%$$

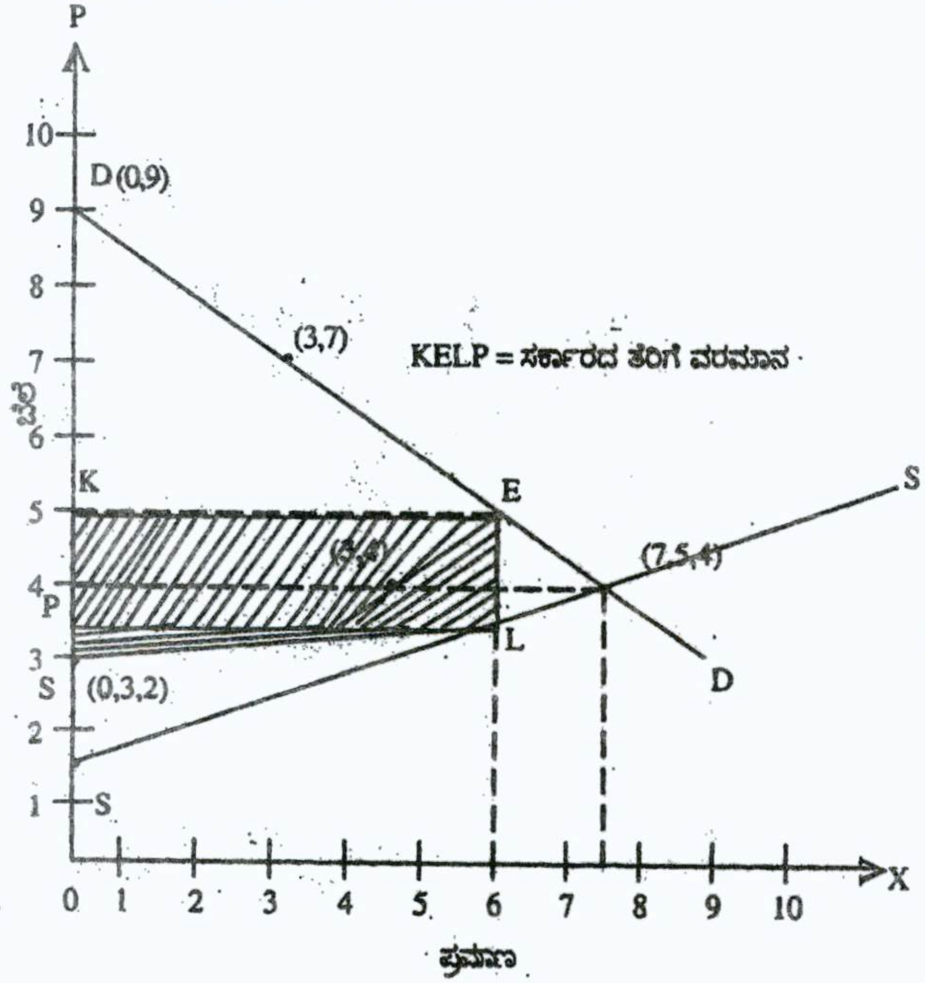
ತೆರಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಅನುಭೋಗಿಯ ಹಿಸ್ಸೆ - ಶೇ. 36.3

ಉಳಿದದ್ದು ಉತ್ಪಾದಕನ ಹಿಸ್ಸೆ . ಅಂದರೆ,

100 - 66.3 = 33.7

ಶೇ. 33.7 ಉತ್ಪಾದಕರ ಹಿಸ್ಸೆ.

ಈ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಮೂಡಿಸೋಣ.



ತೆರಿಗೆಗೆ ಮುಂಚೆ ;

ಬೇಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕ : $P = 9 - {}^{2}/_{3}\,x$

x	p
0	9
3	7
7.5	4

ನೀಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕ : $P = {}^{3}/_{2} + {}^{1}/_{3}\,x$

x	p
0	$^{3}/_{2}$
3	$^{5}/_{2}$
7.5	4

ನೀಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕ : $P = 3 + {}^{1}/_{3}\,x$

x	p
0	3
3	4
6	5

2.6 ಮಾರುಕಟ್ಟೆ ಸಮತೋಲನದ ಮೇಲೆ ಸಹಾಯಧನದ ಪರಿಣಾಮ

ಸರ್ಕಾರ ತೆರಿಗೆ ಹಾಕುವುದರ ಬದಲಿಗೆ, ಒಂದು ಸರಕಿಗೆ, ಸಹಾಯಧನ ನೀಡುತ್ತದೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಸಹಾಯಧನ, ಋಣಾತ್ಮಕ ತೆರಿಗೆಗೆ ಸಮ. ಆದ್ದರಿಂದ ತೆರಿಗೆ ಹಾಕಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಪರಿಣಾಮಗಳಿಗೆ ವ್ಯತಿರಿಕ್ತವಾದ ಪರಿಣಾಮಗಳು ಸಹಾಯಧನದಿಂದ ಉಂಟಾಗುತ್ತವೆ. ನಮ್ಮ ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನೇ ಮತ್ತೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಬೇ : $P = 9 - {}^{2}/_{3}x$ ..... (1)

ನೀ : $P = {}^{3}/_{2} + {}^{1}/_{3}\,x$ .... (2)

ಈಗ ತೆರಿಗೆಗೆ ಮುಂಚಿನ ಸಮತೋಲನ ಬೆಲೆ ಮತ್ತು ಸಮತೋಲನ ಪ್ರಮಾಣಗಳು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿವೆ. ಅವುಗಳೆಂದರೆ, $\bar{p} = 4$ ಮತ್ತು $\bar{x} = 7.5$

ಈಗ ಸರ್ಕಾರ ಪ್ರತಿ ಬೆಲೆ ಘಟಕಕ್ಕೆ ರೂ. 3/2 ರ ಸಹಾಯಧನ ನೀಡುತ್ತದೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ ಹೊಸ ಸಮತೋಲನ ಬೆಲೆ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಏರ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ಬೇ : $P = 9 - {}^{2}/_{3}\, x$

ನೀ : $P = {}^{3}/_{2} + {}^{1}/_{3}\, x - {}^{3}/_{2}$

$P = 9 - {}^{2}/_{3}\, x$ ..... (3)

$P = {}^{1}/_{3}\, x$ .... (4)

ಸಮತೋಲನದಲ್ಲಿ ಬೇ = ನೀ

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಮೀಕರಣ (3) ಮತ್ತು (4)ನ್ನು ಸಮಗೊಳಿಸಿದಾಗ,

$9 - {}^{2}/_{3}\, x = {}^{1}/_{3}\, x$
$-{}^{2}/_{3}\, x - {}^{1}/_{3}\, x = -9$
$-x = -9$
$\bar{x}_1 = 9$

x_1, ಸಹಾಯಧನದ ನಂತರದ ಸಮತೋಲನ ಪ್ರಮಾಣ.
xನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (3) ಕ್ಕೆ ಹಾಕಿದರೆ

$P = 9 - {}^{2}/_{3} \times 9$

$P = 9 - 6 = 3$

$\bar{P}_1 = 3$

$\bar{P}_1$ ಸಹಾಯ ಧನದ ನಂತರದ ಸಮತೋಲನ ಬೆಲೆ ಈಗ ಸಹಾಯಧನದ ಪೂರ್ವದ ಮತ್ತು ನಂತರದ ಸಮತೋಲನಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸೋಣ.

ಸಹಾಯಧನಕ್ಕೆ ಮುಂಚೆ	ಸಹಾಯಧನದ ನಂತರ
$\bar{P} = 4$	$\bar{P}_1 = 3$
$\bar{x} = 7.5$	$\bar{x}_1 = 9$

ಸಹಾಯಧನದಿಂದಾಗಿ, ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಇಳಿತಾಯ $= \{\bar{P} - \bar{P}_1\}$

$= 4 - 3$

$= 1$

ಸಹಾಯಧನದಿಂದಾಗಿ, ಬೇಡಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಳ $= \{\bar{x}_1 - \bar{x}\}$

$= \{9 - 7.5\}$

$= 1.5$

ಸಹಾಯಧನದಿಂದಾಗಿ ಸರ್ಕಾರಕ್ಕೆ ವೆಚ್ಚ,

$= S x \overline{X_1}$

ಇಲ್ಲಿ S ಸಹಾಯಧನದ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

$= \frac{3}{2} \times 9 = \frac{27}{2}$

ಸಹಾಯಧನ $\frac{3}{2}$ ಆದರೂ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಇಳಿತಾಯ ರೂ. 1 ಆಗಿದೆ ಅಷ್ಟೇ. ಆದ್ದರಿಂದ,

ರೂ. $\frac{3}{2}$ ಸಹಾಯಧನದಲ್ಲಿ - ಅನುಭೋಗಿಗೆ ಸಲ್ಲುವುದು ರೂ. 1

ರೂ. 100 ರ ಸಹಾಯಧನದಲ್ಲಿ - ಅನುಭೋಗಿಗೆ $\frac{1}{3/2} \times 100$

$= \frac{2}{3} \times 100 = \frac{200}{3} = 66.6$

ಅನುಭೋಗಿಗೆ ಸಲ್ಲುವುದು - ಶೇ. 66.6

ಉತ್ಪಾದಕನಿಗೆ ಸಲ್ಲುವುದು - ಶೇ. 33.4

ಸಹಾಯಧನಕ್ಕೆ ಮುಂಚೆ :

ಬೇಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕ :

$P = 9 - \frac{2}{3}x$

x	p
0	9
3	7
7.5	4

ನೀಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕ :

$P = \frac{3}{2} + \frac{1}{3}x$

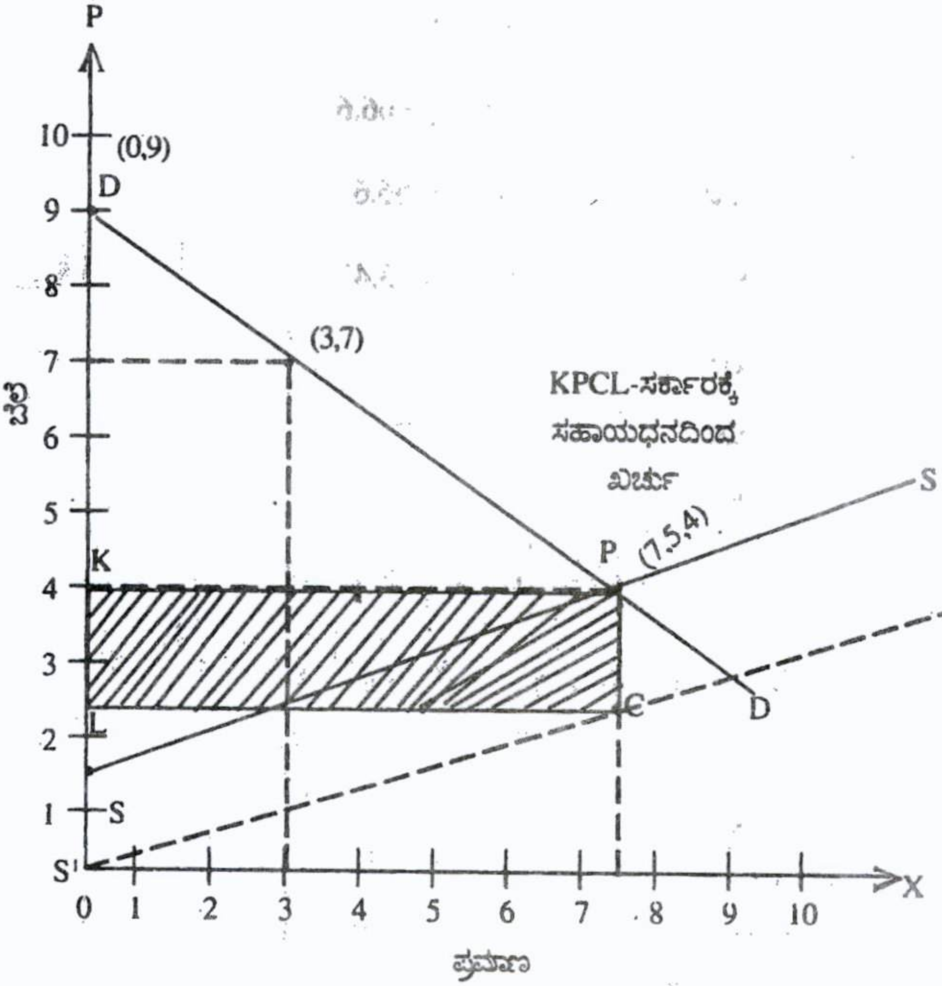
x	p
0	$\frac{3}{2}$
3	$\frac{5}{2}$
7.5	4

ಸಹಾಯಧನದ ನಂತರ

ನೀಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕ

$P = \frac{1}{3}x$

x	p
0	0
3	1
7.5	2.5



2.7 ಸಾರಾಂಶಿಸೋಣ

ಬೇಡಿಕೆ ಮತ್ತು ನೀಡಿಕೆ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಸರಳ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕಗಳ ಮೂಲಕ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯ. ಸರಳ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕಗಳು ತುಂಬಾ ಸರಳವಾದ ಸಂಬಂಧ ಸೂಚಕಗಳು. ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಮಾರುಕಟ್ಟೆಯಲ್ಲಿ ಬೇಡಿಕೆ, ನೀಡಿಕೆಗಳ ಸಂಬಂಧ ಸರಳ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕ ಸಂಬಂಧವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೂ ಸರಳತೆಯ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಈ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಸರಳ ರೇಖೆ ಸಂಬಂಧಗಳೆಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಂಡು ಮುಂದುವರಿಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

$Y = mx + c$ ರೂಪದ ಸರಳ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕ ಅತ್ಯಂತ ಉಪಯುಕ್ತವಾದದ್ದು. ಇದು x ಮತ್ತು y ಎಂದು ಬಿಂಬಕಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನಾವು ಈ ಬಿಂಬಕ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಬಳಸಿ ಬೇಡಿಕೆ ಮತ್ತು ನೀಡಿಕೆಗಳನ್ನು ಸಮಗೊಳಿಸಿ ಹೇಗೆ ಸಮತೋಲನ ಬೆಲೆ ಮತ್ತು ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಜೊತೆಗೆ ಅದರ ನಕ್ಷಾ ನಿರೂಪಣೆಯನ್ನು ಸಹ ಗಮನಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಇದಲ್ಲದೆ ಸರ್ಕಾರ ತೆರಿಗೆ ಮತ್ತು ಸಹಾಯಧನಗಳನ್ನು ನೀಡಿದಾಗ, ಸಮತೋಲನ ಬೆಲೆ ಮತ್ತು ಪ್ರಮಾಣಗಳಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳುಂಟಾಗುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ತೆರಿಗೆ ವರಮಾನ, ಸರ್ಕಾರದ ಖರ್ಚು, ಅನುಭೋಗಿ ಮತ್ತು ಉತ್ಪಾದಕರು ತೆರಿಗೆ ಮತ್ತು ಸಹಾಯ ಧನದ ಹಿಸ್ಸೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಪಡೆಯುತ್ತಾರೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಹ ಗಮನಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಪರಿಣಾಮಗಳ ನಕ್ಷಾ ನಿರೂಪಣೆಗಳನ್ನು ಸಹ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಮುಂದಿನ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನಾವು ಸ್ವಲ್ಪ ಮುಂದೆ ಹೋಗಿ ವಕ್ರ ರೇಖಾ ಬಿಂಬಕ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಲಿಯುತ್ತೇವೆ.

2.8 ಮುಂದಿನ ಓದಿಗಾಗಿ

1. ಪಿ. ಕೆ. ರೇಣುಕಾರ್ಯ : ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಪರಿಮಾಣಾತ್ಮಕ ವಿಧಾನಗಳು. ಅಧ್ಯಾಯ - 2

*****

ಘಟಕ - 3 : ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ವಕ್ರ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕದ ಉಪಯೋಗಗಳು

ರಚನೆ:

3.1 ಸರಳ ರೇಖೆ ಮತ್ತು ವಕ್ರ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕಗಳು

3.2 ವಕ್ರ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕದ ಸೂತ್ರಗಳು : ಪ್ಯಾರಾಬೋಲಾ, ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾ ಮತ್ತು ಎಕ್ಸ್‌ಪೋನೆನ್‌ಷಿಯಲ್ ಬಿಂಬಕಗಳು

3.3 ವಕ್ರ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕಗಳು ಮತ್ತು ಮಾರುಕಟ್ಟೆ ಸಮತೋಲನ

3.4 ಉತ್ಪನ್ನ ಸಾಧ್ಯತಾ ರೇಖೆಗಳು

3.5 ಪ್ಯಾರೆಟೋನಿಯಮ ಮತ್ತು ಆದಾಯ ವಿತರಣೆ

3.6 ಮುಖ್ಯ ಪರಿಭಾವನೆಗಳು

3.7 ಸ್ವಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

3.8 ಸಾರಾಂಶಿಸೋಣ

3.9 ಮುಂದಿನ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ

3.1 ಸರಳ ರೇಖೆ ಮತ್ತು ವಕ್ರ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕಗಳು

ಹಿಂದಿನ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ನಾವು ಸರಳ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿದೆವು. ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಚಲಗಳ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧ ಸರಳ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿರುವುದಿಲ್ಲ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು. ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಹೆಚ್ಚಿನ ಬಿಂಬಕ ಸಂಬಂಧಗಳು ವಕ್ರ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಕೆಳಗಿನ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ನೋಡೋಣ.

$Y = f(x)$ ಬಿಂಬಕ ಸಂಬಂಧದಲ್ಲಿ

X ನ ಘಾತ + 1 ಆಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಅದು ವಕ್ರ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕ ಎಂದು ಗುರುತಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$Y = ax^2 + bx + c$ ಎಂಬ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ xನ ಘಾತ 2 ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ವಕ್ರ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕ.

ಇದನ್ನು ಕ್ವಾಡ್ರಾಟಿಕ್ ಬಿಂಬಕ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಎರಡು ಚಲಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಕ್ವಾಡ್ರಾಟಿಕ್ ಬಿಂಬಕದ ಅವ್ಯಕ್ತ ಚಲದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಅಗತ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸುವುದು ಸುಲಭವಾಗುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಕ್ವಾಡ್ರಾಟಿಕ್ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ಇಲ್ಲಿ 'x' ಅವ್ಯಕ್ತ ಚಲ. ಇದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ಉಧಾಹರಣೆ,

$3x^2 + 5x - 8 = 0$ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ ಅವ್ಯಕ್ತ ಚಲ X ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ,

$a = 3$

$b = 5$

$c = -8$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರಕ್ಕೆ ಹಾಕಿದರೆ,

$$x = \frac{-5-11}{6} = \frac{-16}{6} = -2.66$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+96}}{6}$$

$$x = \frac{-5+11}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

ಆದ್ದರಿಂದ X ಗೆ 2 ಬೆಲೆಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳೆಂದರೆ, $X = 1$ ಮತ್ತು $X = -2.66$

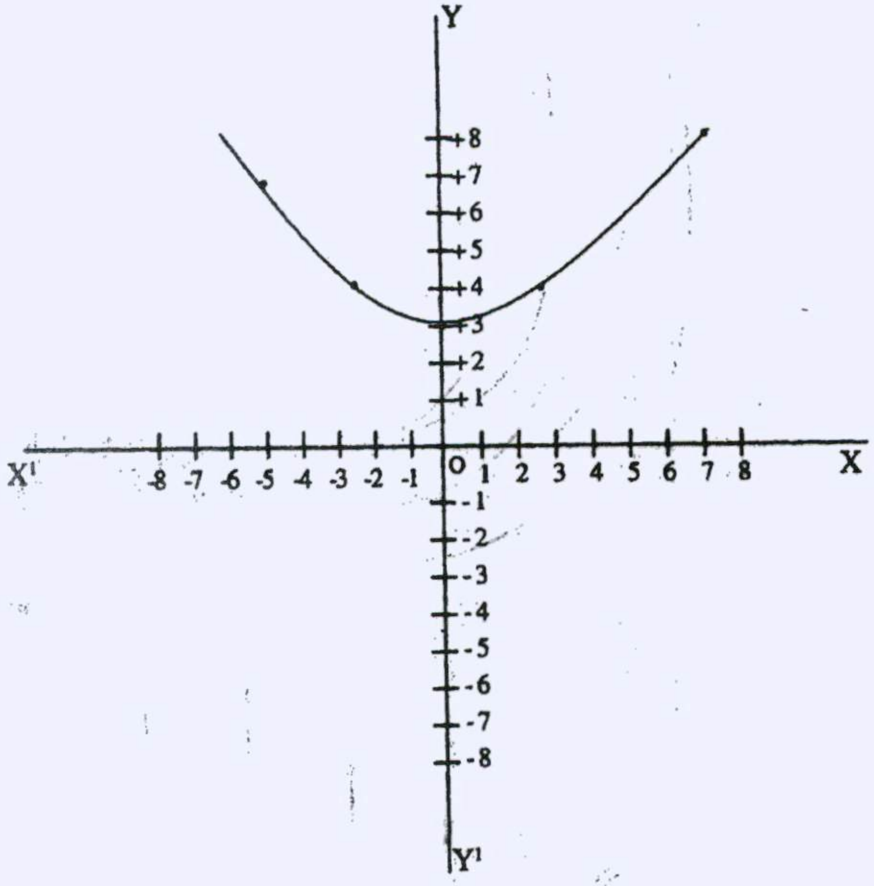
ಆದ್ದರಿಂದ $ax^2 + bx + c = 0$ ಎನ್ನುವ ರೀತಿಯ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ Xಗೆ ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳಿರುತ್ತವೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು.

ಇನ್ನೊಂದು ಕ್ವಾಡ್ರಾಟಿಕ್ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ :

$$Y = X^2 + 3$$

ಇದನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಮೂಡಿಸೋಣ.

x	y
0	3
1	4
2	7
-1	4
-2	7



$$Y = ax^2 + bx + c$$

ಎನ್ನುವ ರೀತಿಯ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಮೂಡಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಪೆರಾಬೋಲಾ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

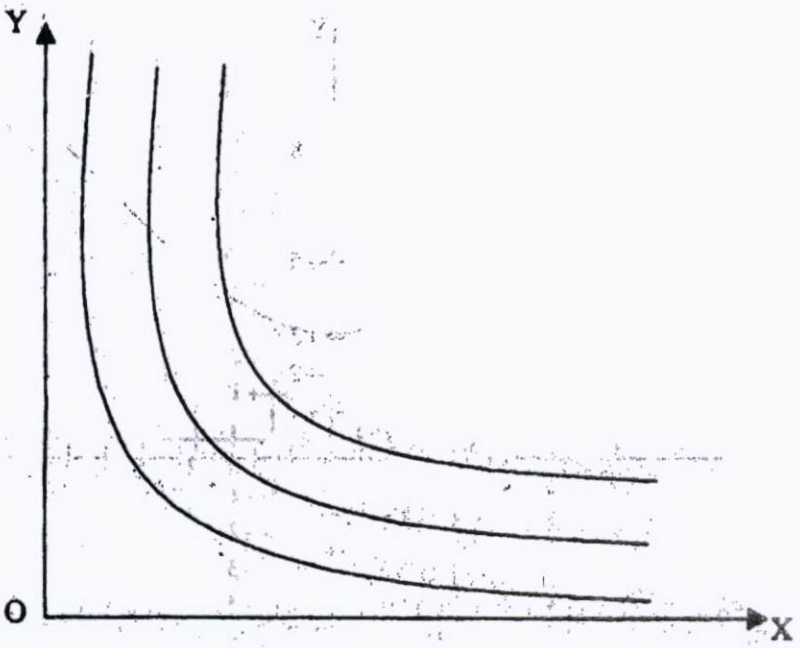
ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾ :

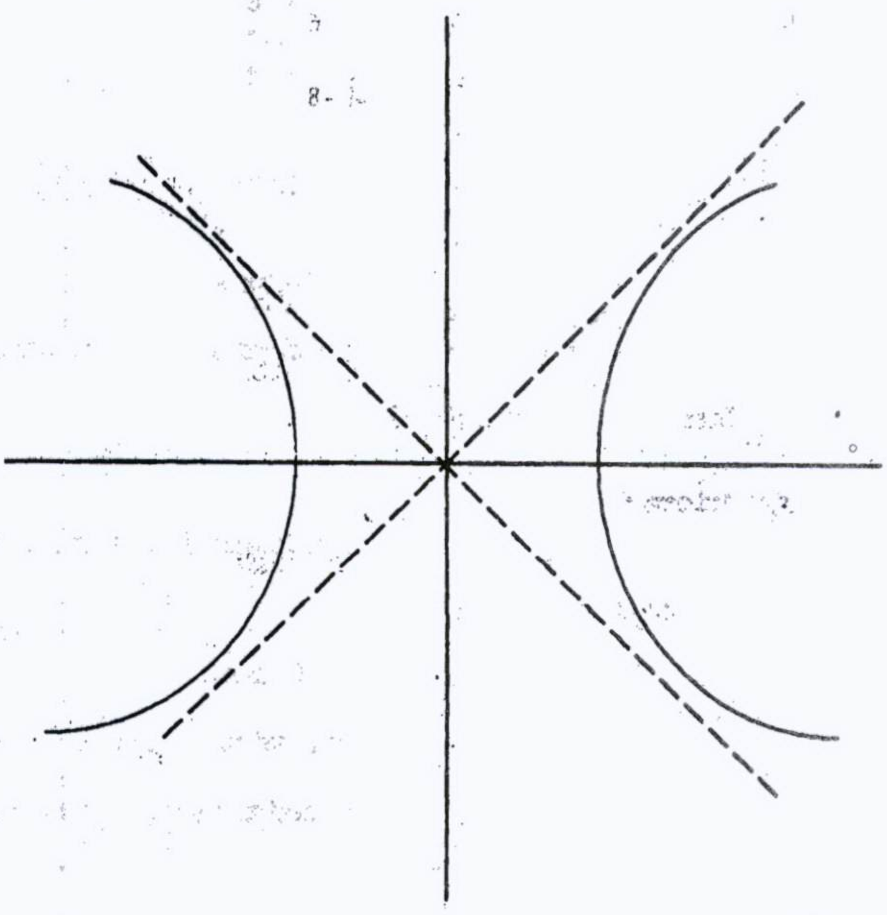
$XY = a^2$ ಎನ್ನುವ ರೂಪದ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತಿದೆ. ಇದರ ಬಿಂಬಕವನ್ನು

$XY^n = C$ ಎಂದೂ

$(x + b)(y + c) = a$ ಎಂದೂ ಸಹ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾವನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಮೂಡಿಸಿದಾಗ ಕೆಳಗಿನ ರೀತಿಯ ಚಿತ್ರಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.


Y
O
X



ಎಕ್ಸ್‌ಪೊನೆನ್ಷಿಯಲ್ ರೇಖೆ :

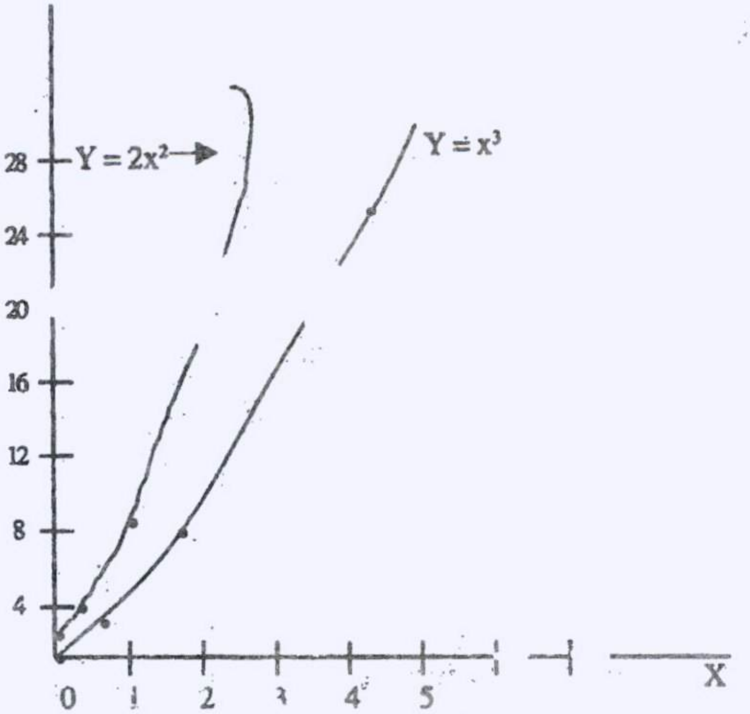
$Y = a^x$ ಎನ್ನುವ ರೀತಿಯ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಎಕ್ಸ್‌ಪೊನೆನ್ಷಿಯಲ್ ಬಿಂಬಕ ಎಂದೂ, $y = x^b$ ಎನ್ನುವ ರೀತಿಯ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಪವರ್ ಬಿಂಬಕವೆಂದೂ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಎರಡು ಚಲಗಳು a ಮತ್ತು b ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳು. ಈ ಬಿಂಬಕಗಳ ವಿಶೇಷವೆಂದರೆ, ಸ್ವತಂತ್ರ ಚಲ. ಬದಲಾಗುತ್ತಾ ಹೋದಂತೆ, ಅವಲಂಬಿ ಚಲ ಬಹಳ ವೇಗವಾಗಿ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ ಅಥವಾ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

$Y = x^a$

$Y = a^x$

x	0	1	2	3
$y = x^3$	0	1	8	27
$y = 2^x$	1	2	4	8

ಇವೆರಡೂ ಬಿಂಬಕಗಳ ನಕ್ಷೆ ಕೆಳಗಿನಂತಿರುತ್ತದೆ.



ಎಕ್ಸ್‌ಪೊನೆನ್‌ಷಿಯಲ್ ಬಿಂಬಕಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಕೆಳಗಿನ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸುವುದು ಅಗತ್ಯ.

(1) $X^m \times X^n = X^{m+n}$

ಉದಾಹರಣೆ,

$X^2 \times X^3 = X^5$

$X^5 \times X^2 = X^7$

(2) $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

ಉದಾಹರಣೆ ;

$\frac{x^{10}}{x^5} = x^{10-5} = x^5$

(3) $x^{m/n} = n\sqrt{x^m}$

ಉದಾಹರಣೆ ;

$x^{4/3} = \sqrt[3]{x^4}$

(4) $X^0 = 1$

ಉದಾಹರಣೆ ;

$10^0 = 1$

$5^0 = 1$

$a^0 = 1$

ವಕ್ರ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕಗಳು ಮತ್ತು ಮಾರುಕಟ್ಟೆ ಸಮತೋಲನ :

ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ, ಸಮತೋಲನ ಬೆಲೆ ಮತ್ತು ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಬೇಡಿಕೆ : $9x + 4P = 40$ .... (1)

ನೀಡಿಕೆ : $9x = P^2 - 4$ .... (2)

ಸಮತೋಲನದಲ್ಲಿ ಬೇಡಿಕೆ - ನೀಡಿಕೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಮೇಲಿನ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆದು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಗೊಳಿಸೋಣ.

$9x = 40 - 4P$ .... (3)

$9x = P^2 - 4$ .... (4)

$40 - 4P = P^2 - 4$

$P^2 + 4P - 44 = 0$

ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿ P ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

$$P = \frac{-4 \pm \sqrt{182}}{2}$$

$$P = \frac{-4+13.86}{2} = \frac{9.86}{2} = 4.9$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮತೋಲನ ಬೆಲೆ

$\overline{P} = 4.9$

ಈಗ P ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣ 3ಕ್ಕೆ ಹಾಕೋಣ.

$9x = 40 - 4 \times 4.9$

$9x = 40 - 19.6$

$9x = 20.4$

$$x = \frac{20.4}{9} = 2.2$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮತೋಲನ ಪ್ರಮಾಣ $\overline{X} = 2.2$

ಈಗ ಬೇಡಿಕೆ ಮತ್ತು ನೀಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಮೂಡಿಸೋಣ.

ಬೇಡಿಕೆ : $9x + 4P = 40$

$4P = 40 - 9x$

$P = 10 - \frac{9}{4}x$

ನೀಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕ : $9x = P^2 - 4$

$P^2 = 9x + 4$

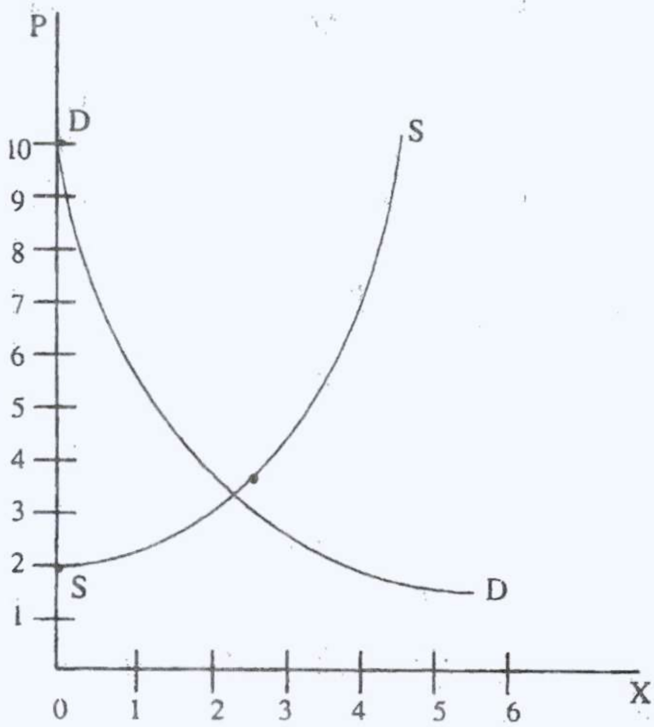
$P = \sqrt{9x+4}$

ಬೇಡಿಕೆ : $P = 10 - \frac{9}{4}x$

ನೀಡಿಕೆ : $P = \sqrt{9x+4}$

X	P
0	10
4	1
2.2	4.9

X	P
0	2
2.2	4.9
5	7



ಉದಾಹರಣೆ - 2 :

ಕೆಳಗಿನ ಬೇಡಿಕೆ ಮತ್ತು ನೀಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಸಮತೋಲನ ಬೆಲೆ ಮತ್ತು ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಬೇಡಿಕೆ : $Px = 25$ .... (1)

ನೀಡಿಕೆ : $P = 2 + {}^{x}/_{2}$ ..... (2)

ಬೇಡಿಕೆ ಮತ್ತು ನೀಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಸಮಗೊಳಿಸುವ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$Px = 25$ .... (3)

$Px = 2x + \frac{x^2}{2}$ ..... (4)

ಸಮತೋಲನದಲ್ಲಿ ಬೇಡಿಕೆ ಮತ್ತು ನೀಡಿಕೆಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮೀಕರಣ 3 ಮತ್ತು 4ನ್ನು ಸಮಗೊಳಿಸಬಹುದು.

$$25 = 2x + \frac{x^2}{2}$$

$$25 - 2x - \frac{x^2}{2} = 0 ....(5)$$

ಸಮೀಕರಣ (5)ನ್ನು ಉದ್ದಕ್ಕೂ 2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ,

$x^2 + 4x - 50 = 0$ .... (6)

ಈಗ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿ x ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{216}}{2} = \frac{-4 \pm 14.7}{2}$$

$$X = \frac{10.7}{2} = 5.35$$

X ಬೆಲೆಯನ್ನು ನೀಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕಕ್ಕೆ ಹಾಕಿದಾಗ,

$$P = 2 + \frac{5.35}{2}$$

$$P = 2 + 2.67$$

$$\overline{P} = 4.67$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮತೋಲನ ಬೆಲೆ $\overline{P}$ = **4.67** ಮತ್ತು ಸಮತೋಲನ ಪ್ರಮಾಣ $\overline{X}$ = **5.35**

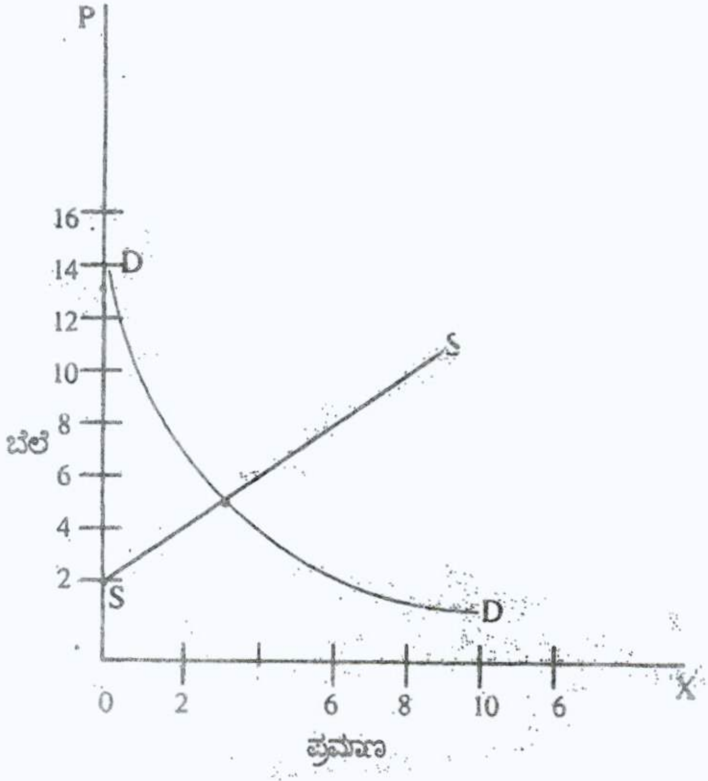
ಬೇಡಿಕೆ ಮತ್ತು ನೀಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ... ೩ಸೋಣ :

ಬೇ : $P = \frac{-25}{x}$, $P = \frac{25}{x}$

ನೀ : $P = 2 + \frac{x}{2}$

X	P
2	12.5
4.67	5.35
5	5

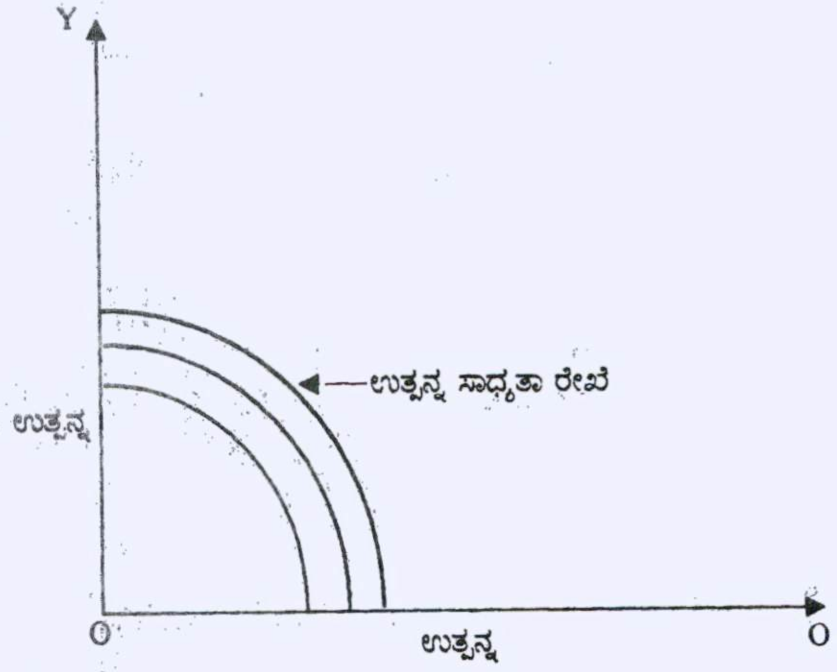
X	P
0	2
2	3
4.67	5 35



4. ಉತ್ಪನ್ನ ಸಾಧ್ಯತೆ ರೇಖೆ :

ಅನೇಕ ಉತ್ಪಾದಕರು ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸರಕನ್ನು ತಮ್ಮ ಉದ್ಯಮಗಳಲ್ಲಿ ಉತ್ಪಾದಿಸುವುದು ನಿಮಗೆಲ್ಲಾ ತಿಳಿದ ವಿಷಯ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಂದು ಉಕ್ಕಿನ ಕೈಗಾರಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ರೀತಿಯ ಉಕ್ಕಿನ ಪದಾರ್ಥಗಳು ಉತ್ಪಾದಿತವಾಗುತ್ತವೆ. ಅದೇ ರೀತಿಯ ಒಂದು ಕಾಗದದ ಕೈಗಾರಿಕೆಯಲ್ಲಿ ನಾನಾ ಬಗೆಯ ಕಾಗದಗಳು ತಯಾರಾಗುತ್ತವೆ. ಒಂದು ಉದ್ಯಮ x ಮತ್ತು y ಎರಡು ಬಗೆಯ ಸರಕುಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಬರೀ xನ್ನು ಉತ್ಪಾದಿಸಬಹುದು ಅಥವಾ Y ಅನ್ನೇ ಉತ್ಪಾದಿಸಬಹುದು. ಬದಲಿಗೆ ಇವೆರಡನ್ನೂ ಸ್ವಲ್ಪ - ಸ್ವಲ್ಪ ಉತ್ಪಾದಿಸಬಹುದು : ಆದರೆ ಸಂಪನ್ಮೂಲಗಳು ಮಿತವಾಗಿರುವುದರಿಂದ Xಅನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ಉತ್ಪಾದಿಸಿದರೆ ಅನಿವಾರ್ಯವಾಗಿ Y ನ ಉತ್ಪಾದನೆ [illegible] ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ Y ಅನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ಉತ್ಪಾದಿ[illegible] ಅನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಉದ್ಯಮ ಎಷ್ಟೆಷ್ಟು X ಮತ್ತು Y ಗಳನ್ನು ಉತ್ಪಾದಿಸುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಇದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಉತ್ಪನ್ನ ಸಾಧ್ಯತೆ ರೇಖೆ (Production Positibility

Curve) ಅಥವಾ ಉತ್ಪನ್ನ ಪರಿವರ್ತನೆ ರೇಖೆ (Production Transformation Curve) ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ 3 ಉತ್ಪನ್ನ ಸಾಧ್ಯತೆ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.



ಉದಾಹರಣೆ - 1 :

ಒಂದು ಕಂಪನಿ ಎರಡು ರೀತಿಯ ಐಸ್ ಕ್ಯಾಂಡಿಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸುತ್ತಿದೆ. X ಮತ್ತು Y ಈ ಎರಡು ಬಗೆಯ ಕ್ಯಾಂಡಿಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಲು ಇರುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣ ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ.

$(X - 24)(Y - 36) = 240$

ಈ ಕಂಪನಿ ತಯಾರಿಸಬಹುದಾದ ಗರಿಷ್ಠ ಪ್ರಮಾಣದ X ಎಷ್ಟು? ಇದು ತಯಾರಿಸಬಹುದಾದ ಗರಿಷ್ಠ ಪ್ರಮಾಣದ Y ಎಷ್ಟು ? $X = {}^{2}/_{3}$ Y ಗಳಷ್ಟು ಪ್ರಮಾಣದ X ಮತ್ತು Y ಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಬೇಕಾದರೆ ಎಷ್ಟೆಷ್ಟು ಪ್ರಮಾಣದ X, Y ಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಬೇಕು ? ಉತ್ಪನ್ನ ಸಾಧ್ಯತೆ ರೇಖೆಯನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಮೂಡಿಸಿ.

ಉತ್ತರ : ಗರಿಷ್ಠ ಪ್ರಮಾಣದ Y ಗೊತ್ತುಮಾಡಲು ಉತ್ಪನ್ನ ಸಾಧ್ಯತೆ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ $X = 0$ ಹಾಕಬೇಕು.

$(x - 24)(Y - 36) = 240$

$(-24)(Y - 36) = 240$

$-24Y + 864 = 240$

$- 24Y = 240 - 864$

$- 24Y = -624$

$24Y = 624$

$$Y = \frac{624}{624} = 26$$

ಗರಿಷ್ಠ ಪ್ರಮಾಣದ X ಗೊತ್ತುಮಾಡಲು ಉತ್ಪನ್ನ ಸಾಧ್ಯತೆ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ $Y = 0$ ಹಾಕಬೇಕು.

$(x - 24)(0 - 36) = 240$

$- 36x + 624 = 240$

$- 36x = - 624 + 240$

$- 36x = - 384$

$$X = \frac{384}{36} = 10.7$$

$X = \frac{2}{3}$ ಪಡೆಯಲು ಉತ್ಪನ್ನ ಸಾಧ್ಯತೆ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ

$X = \frac{2}{3}$ ಹಾಕಬೇಕು

ಆದ್ದರಿಂದ $(\frac{3}{2} Y - 24)(Y - 36) = 240$

ಉದ್ದಕ್ಕೂ $\frac{2}{3}$ ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ,

$(Y - 36)(Y - 36) = 240$

$(Y - 36)^2 = 240$

$(Y - 36) = \sqrt{240}$

$(Y - 36) = - 15.2$

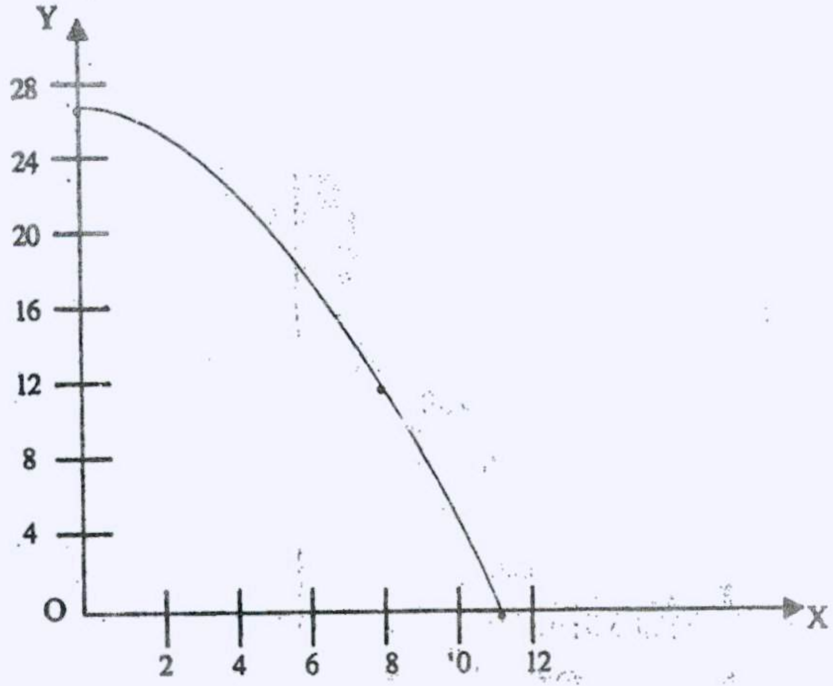
$Y = + 36 - 15.5$

$= 10.5$

$$\therefore \quad X = \frac{2}{3} Y$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $X = \frac{2}{3} Y$

$$= \frac{2}{3} (10.5) = 7.0$$



ಗರಿಷ್ಠ $x = 10.7$

ಗರಿಷ್ಠ $Y = 26$

$X = \frac{2}{3} X$ ಆದಾಗ

$X = 7, Y = 10.5$

ಉದಾಹರಣೆ - 2 :

ಒಂದು ಕಂಪನಿ ತನ್ನ ಸಂಪನ್ಮೂಲಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು X ಮತ್ತು Y ಎಂಬ ಎರಡು ಬಗೆಯ ಕಾಗದಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸುತ್ತಿದೆ. ಅದರ ಉತ್ಪನ್ನ ಸಾಧ್ಯತೆ ರೇಖೆಯನ್ನು $(X - 30)(Y - 15) = 150$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ಉದ್ಯಮ ತಯಾರಿಸಬಹುದಾದ

ಗರಿಷ್ಠ ಪ್ರಮಾಣದ X ಮತ್ತು Y ಗಳೆಷ್ಟು? $X = 2Y$ ಇರುವಂತೆ ಉತ್ಪಾದಿಸಲು ಎಷ್ಟು ಪ್ರಮಾಣದ X ಮತ್ತು Y ಗಳನ್ನು ಉತ್ಪಾದಿಸಬೇಕು? ಉತ್ಪನ್ನ ಸಾಧ್ಯತೆ ರೇಖೆಯನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಮೂಡಿಸಿ.

ಉತ್ತರ :

ಗರಿಷ್ಠ ಪ್ರಮಾಣದ X ಪಡೆಯಲು ಉತ್ಪನ್ನ ಸಾಧ್ಯತೆ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ $Y = 0$ ಹಾಕಬೇಕು.

$(X - 30)(Y - 15) = 150$

$(X-30)(0 - 15) = 150$

$-15x + 450 = 150$

$15x = 300$

$\underline{X = 20}$

ಗರಿಷ್ಠ ಪ್ರಮಾಣದ Y ಪಡೆಯಲು ಉತ್ಪನ್ನ ಸಾಧ್ಯತೆ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ $X = 0$ ಹಾಕಬೇಕು.

$(X - 30)(Y - 15) = 150$

$-30Y + 450 = 150$

$-30Y = -300$

$\underline{Y = 10}$

$X = 2y$ ಆಗಲು ಉತ್ಪನ್ನ ಸಾಧ್ಯತೆ

ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ, $X = 2y$ ಹಾಕಬೇಕು.

$\therefore (2Y - 30)(Y - 15) = 150$

ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ,

$(Y - 15)(Y - 15)$

$(Y - 15)^2 = 75$

$Y - 15 = \sqrt{75}$

$Y - 15 = -8.7$

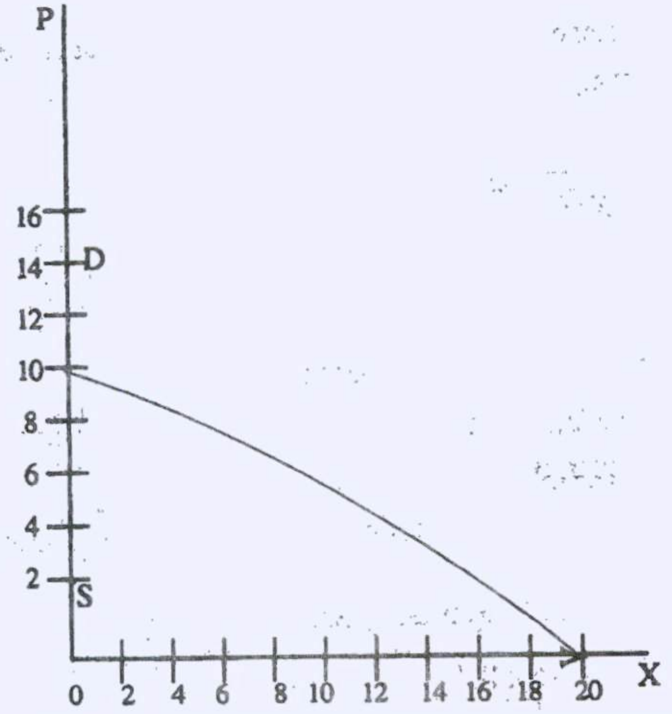
$Y = 15 - 8.7$

$Y = 6.3$

$X = 2Y$ ಆದರೆ,

$X = 2\,(6.3) = 12.6$

• ಗರಿಷ್ಠ $X = 20$
ಗರಿಷ್ಠ $Y = 10$
$X = 2Y$ ಆದರೆ,
$X = 12.6,\ Y = 6.3$



3.5 ಪ್ಯಾರೆಟೋ ನಿಯಮ

ವಿಲ್‌ಫ್ರೆಡ್ ಪ್ಯಾರೆಟೋ ಆದಾಯ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸಿರುವ ನಿಯಮವೆಂದರೆ,

$$N = \frac{A}{X^b}$$

ಇಲ್ಲಿ N ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿ X ಪ್ರಮಾಣದ ಆದಾಯಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಆದಾಯವನ್ನು ಎಷ್ಟು ಜನ ಹೊಂದಿದ್ದಾರೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

X - ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆದಾಯ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಮತ್ತು

A - ಆ ಪ್ರದೇಶದ ಜನಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮತ್ತು

b - ಜನಸಂಖ್ಯೆಯ ಚಲ - ಸ್ಥಿರಾಂಕವನ್ನು

ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತವೆ. ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿ ವಿವಿಧ ಗುಂಪಿನ ಆದಾಯವರ್ಗದವರು ಎಷ್ಟಿದ್ದಾರೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು. ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಉದಾಹರಣೆ - 1 :

ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪ್ರದೇಶಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ, ಪ್ಯಾರೆಟೋ ಆದಾಯ ವಿತರಣೆ ನಿಯಮವನ್ನು

$N = \frac{16X10^9}{X^{3/2}}$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಈ ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿ,

(i) ರೂ. 2,500 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಆದಾಯವಿರುವವರೆಷ್ಟು ?

(ii) ರೂ. 2,500 ಮತ್ತು ರೂ. 10,000 ಗಳ ನಡುವೆ ಆದಾಯವಿರುವ ಎಷ್ಟು ಜನರಿದ್ದಾರೆ ?

(iii) ಅತ್ಯಂತ ಹೆಚ್ಚು ಆದಾಯವಿರುವ 27 ಜನರಲ್ಲಿನ ಕನಿಷ್ಠ ಆದಾಯವೆಷ್ಟು ?

(i) ರೂ. 2500 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಆದಾಯವಿರುವವರೆಂದರೆ,

$$N = \frac{16X10^9}{(2500)^{3/2}}$$

$$N = \frac{16X10^9}{(5^2X10^2)^{3/2}}$$

$$N = \frac{16X10^9}{5^3X10^3}$$

$$N = 16X2X2X2X10^3$$

N = 1, 28, 000

ಆದ್ದರಿಂದ, 1,28,000 ಜನರ ಆದಾಯ ರೂ. 2,500 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ.

(ii) ರೂ. 2,500 ಮತ್ತು ರೂ. 10,000ಗಳ ನಡುವೆ ಆದಾಯವಿರುವವರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾದರೆ, ಮೊದಲು ರೂ. 10,000ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಆದಾಯವಿರುವವರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

$$N = \frac{16 X 10^9}{(10,000)^{3/2}}$$

$$N = \frac{16 X 10^9}{(10^4)^{3/2}}$$

$$N = \frac{16 X 10^9}{10^6}$$

$$\mathbf{N = 16 \times 10^3 = 1600}$$

ಆದ್ದರಿಂದ ರೂ. 25,000 ಮತ್ತು ರೂ. 10,000ಗಳ ನಡುವೆ ಆದಾಯವಿರುವವರ ಸಂಖ್ಯೆಯೆಂದರೆ ;

1,28000 - 10,000

= 1, 18, 000

(iii) 27 ಜನ ಅತ್ಯಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಆದಾಯವುಳ್ಳವರಲ್ಲಿನ ಕನಿಷ್ಠ ಆದಾಯ,

$$27 = \frac{16 X 10^9}{X^{3/2}}$$

$$X^{3/2} = \frac{16 X 10^9}{27}$$

$$X = \left[\frac{16 X 10^9}{27}\right]^{2/3}$$

$$X = \left[\frac{2^3 X 2 X 10^9}{(3^3)^{2/3}}\right]^{2/3}$$

$$X = \frac{4 X 10^6 X \sqrt[3]{4}}{3^2} = \frac{4 X 10^6 X 1.8}{9}$$

$= 0.8 \ X \ 10^6$
$= 1,00,00.0$

ಉದಾಹರಣೆ - 2 : ಪ್ಯಾರೆಟೋ ನಿಯಮವನ್ನು,

$N = \frac{8X10^8}{X^{3/2}}$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

(i) ಎಷ್ಟು ಜನರ ಆದಾಯ ರೂ. 1600 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ ?

(ii) ಎಷ್ಟು ಜನರ ಆದಾಯ ರೂ. 1600 ಮತ್ತು ರೂ. 2500 ರ ನಡುವೆ ಇದೆ ?

(iii) ಅತ್ಯಂತ ಹೆಚ್ಚು ಆದಾಯವುಳ್ಳ 800 ಜನರಲ್ಲಿನ ಕನಿಷ್ಠ ಆದಾಯ ಎಷ್ಟು ?

(i) ರೂ. 1600ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಆದಾಯವಿರುವವರ ಸಂಖ್ಯೆ

$$N = \frac{8X10^8}{(1600)^{3/2}}$$

$$N = \frac{8X10^8}{(4^2 X10^2)^{3/2}}$$

$$N = \frac{8X10^8}{4^3 X10^3}$$

$$N = \frac{8X10^8}{4X4X4X10^3}$$

$$N = \frac{2X10^5}{4^2} \quad = \frac{2X10^5}{2X8}$$

$$N = \frac{10^5}{8}$$

$$N = \frac{10X10X10X10^2}{2X2X2}$$

$$N = 5X5X5X10^2$$

$$N = 12{,}500$$

12,500 ಜನರ ಆದಾಯ ರೂ. 1600ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ.

(ii) ರೂ. 2500 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಆದಾಯವಿರುವವರು

$$N = \frac{8X10^8}{(5^2 X10^2)^{3/2}}$$

$$N = \frac{8X10^8}{5^3 X10^3}$$

$$N = \frac{2X2X2X10X10X10X10}{5X5X5X10X10X10}$$

N = 64,000

ಆದ್ದರಿಂದ, ರೂ. 1600 ಮತ್ತು ರೂ. 2500 ರ ನಡುವೆ ಆದಾಯವಿರುವ ಜನರ ಸಂಖ್ಯೆ.

64,000 - 12,500

= 51,500

(iii) ಅತ್ಯಂತ ಹೆಚ್ಚು ಆದಾಯವುಳ್ಳ 800 ಜನರಲ್ಲಿನ ಕನಿಷ್ಠ ಆದಾಯವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು.

$$N = \frac{8X10^8}{X^{3/2}}$$

$$800 = \frac{8X10^8}{X^{3/2}}$$

$$X^{3/2} = \frac{8X10^8}{(800)}$$

$$X = \frac{(8X10^8)^{2/3}}{(8X10^2)^{2/3}}$$

$$X = \frac{(2^3 X10^8)^{2/3}}{(2^3 X10^2)^{2/3}}$$

$$X = \frac{(2^3 X10^5 X10}{(2^3 X10^2)^{2/3}}^{2/3}$$

$$X = \frac{2^2 X 10^{10/3} X 10^2}{2^2 X 10^{4/3}}$$

$$X = 10^2 X 10^{10/3} X 10^{-4/3}$$

$X = 10^2 X 10^2$

$X = 10^4$

X = 10000

3.6 ಮುಖ್ಯ ಪರಿಭಾಷೆಗಳು

1. ವಕ್ರ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕ
2. ಫೆರಾಬೋಲಾ
3. ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾ
4. ಎಕ್ಸ್‌ಪೊನೆನ್‌ಷಿಯಲ್ ಬಿಂಬಕ
5. ಉತ್ಪನ್ನ ಸಾಧ್ಯತೆ ರೇಖೆ
6. ಪ್ಯಾರೆಟೋ ನಿಯಮ

3.7 ಸ್ವ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

1. ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂಬಕಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಸರಳ ರೇಖೆ ಮತ್ತು ಯಾವುದು ವಕ್ರ ರೇಖೆ ಗುರುತಿಸಿ.

(i) $2x + 3y + 8 = 0$

(ii) $5x = -4y + 3$

(iii) $Y = 3x^2 + 4x + 8$

(iv) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 10$

(v) $(x-20)(Y-40) = 40$

(vi) $x = y^b$

(ii) ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಮಾರುಕಟ್ಟೆ ಸಮತೋಲನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಬೇ : $x^2 + 5x - 4 + Y = 0$

ನೀ : $2x^2 + y - 9 = 0$

iii) ಒಂದು ಕಂಪನಿಯ ಉತ್ಪನ್ನ ಸಾಧ್ಯತೆ ರೇಖೆಯನ್ನು

$Y = 45 - \frac{X^2}{80}$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

(i) ಈ ಕಂಪನಿ ಉತ್ಪಾದಿಸಬಹುದಾದ ಗರಿಷ್ಠ ಪ್ರಮಾಣದ X ಮತ್ತು Y ಗಳೆಷ್ಟು ?

(ii) X = Y ಆಗಿರುವಾಗ ಎಷ್ಟೆಷ್ಟು ಪ್ರಮಾಣದ X ಮತ್ತು Y ಗಳನ್ನು ಉತ್ಪಾದಿಸಬೇಕು?

(iii) ಉತ್ಪನ್ನ ಸಾಧ್ಯತೆ ರೇಖೆಯನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಮೂಡಿಸಿ.

3.8 ಸಾರಾಂಶಿಸೋಣ

ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನೀವು ವಕ್ರ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಬಳಸುವ ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯ ಮಾಡಿಕೊಂಡಿದ್ದೀರಿ. ಮುಖ್ಯವಾಗಿ, ಪ್ಯಾರಾಬೋಲಾ, ಹೈಪರ್ ಬೋಲಾ ಮತ್ತು ಎಕ್ಸ್‌ಪೋನೆನ್‌ಷಿಯಲ್ ಬಿಂಬಕದ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಸಹ ಹೇಳಲಾಗಿದೆ. ವಕ್ರ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ, ಮಾರುಕಟ್ಟೆ ಸಮತೋಲನ ಬೆಲೆ ಮತ್ತು ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಪ್ಯಾರೆಟೋನಿಯಮವನ್ನು ಹೇಗೆ ಆದಾಯ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲು ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಎರಡು ವಸ್ತುಗಳ ಉತ್ಪಾದನೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಉತ್ಪನ್ನ ಸಾಧ್ಯತೆ ರೇಖೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ರಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ತಿಳಿಸಿಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ವಕ್ರ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ತುಂಬಾ ವ್ಯಾಪಕವಾಗಿ ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ಇದರ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಪರಿಚಯವನ್ನು ಮಾಡಿಕೊಡಲಾಗಿದೆ ಅಷ್ಟೆ. ನಾವು ಮುಂದುವರಿದಂತೆ, ಈ ರೇಖೆಗಳ ವ್ಯಾಪಕ ಬಳಕೆ ತಿಳಿಯುತ್ತಾಹೋಗುತ್ತದೆ.

3.9 ಮುಂದಿನ ಓದಿಗಾಗಿ

ಸಿ. ಕೆ. ರೇಣುಕಾರ್ಯ : ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಪರಿಮಾಣಾತ್ಮಕ ವಿಧಾನಗಳು, ಅಧ್ಯಾಯ - 2.

*****

ಘಟಕ - 4 : ಡಿಫರೆನ್ಷಿಯಲ್ ಕ್ಯಾಲುಕ್ಯುಲಸ್ ಮತ್ತು ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಅದರ ಅನ್ವಯ

ರಚನೆ :

4.1 ವಿಷಯ ಪ್ರವೇಶ

4.2 ಕ್ಯಾಲುಕ್ಯುಲಸ್ - ವಿವರಣೆ

4.3 ಒಂದು ಚಲದ ಲಿಮಿಟ್

4.4 ಲಿಮಿಟ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯಗಳು

4.5 ಕಂಟಿನ್ಯುಯೇಷನ್ ಪರಿಭಾವನೆ

4.6 ಬೀಜಗಣಿತ ಬಿಂಬಕದ ಡಿಫರೆನ್ಸಿಯೇಷನ್ ನಿಯಮಗಳು

4.7 ನಿಮ್ಮ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ

4.8 ಸಾರಾಂಶಿಸೋಣ

4.9 ಮುಖ್ಯ ಪರಿಭಾವನೆಗಳು

4.10 ಮುಂದಿನ ಓದಿಗಾಗಿ

4.1 ವಿಷಯ ಪ್ರವೇಶ

ಅವಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ತುಂಬಾ ಮಹತ್ವ ಪಡೆದಿರುವ ಭಾಗವಾಗಿದೆ. ಈ ಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿದವರೆಂದರೆ, ಸರ್ ಐಸಾಕ್ ನ್ಯೂಟನ್ ಮತ್ತು ಲೆಬಿನಿತ್ಸ್. ತಮ್ಮ ಭೌತವಿಜ್ಞಾನ ನಿರೂಪಣೆಗಾಗಿ ಸರ್ ಐಸಾಕ್ ನ್ಯೂಟನ್ ಈ ಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿದರೆ, ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಪ್ರಮೇಯಗಳಿಗಾಗಿ ಲೆಬಿನಿತ್ಸ್ ಇದನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡರು. ಈ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಪ್ರಮುಖ ಅಂಶವೆಂದರೆ, ಒಂದು ಸ್ವತಂತ್ರ ಚಲ ಅತ್ಯಂತ ಅಲ್ಪ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ, ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚಿನ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆಯಾದಾಗ, ಅದರ ಉತ್ತರ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಅವಲಂಬಿ ಚಲ ಹೇಗೆ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ಅನುಭವಿಸುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ತುಂಬಾ ಸುಲಭವಾಗಿ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡುವುದು.

4.2 ಕ್ಯಾಲುಕ್ಯುಲಸ್ - ವಿವರಣೆ

ಕ್ಯಾಲುಕ್ಯುಲಸ್‌ನಲ್ಲಿ ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಚಲಗಳ ಪಾರಸ್ಪರಿಕ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಕ್ಯಾಲ್‌ಕ್ಯುಲಸ್, ಎರಡು ಭಾಗಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಮೊದಲನೆಯದು ಡಿಫರೆನ್‌ಷಿಯಲ್, ಎರಡನೆಯದು ಇಂಟಗ್ರಲ್‌ಕ್ಯಾಲುಕ್ಯುಲಸ್, ಡಿಫರೆನ್‌ಷಿಯಲ್ ಕ್ಯಾಲುಕ್ಯುಲಸ್‌ನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಅನೇಕ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿ ಪ್ರತಿ ಭಾಗವನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇಂಟಗ್ರಲ್ ಕ್ಯಾಲುಕ್ಯುಲಸ್‌ನಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿತವಾಗಿರುವ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಮತ್ತೆ ಸಂಯೋಜಿಸಿ ಮೂಲ ಬಿಂಬಕಕ್ಕೆ ಹಿಂದಿರುಗಲಾಗುತ್ತದೆ. ಡಿಫರೆನ್‌ಷಿಯಲ್ ಕ್ಯಾಲ್‌ಕ್ಯುಲಸ್ ಮತ್ತು ಇಂಟಗ್ರಲ್ ಕ್ಯಾಲ್‌ಕ್ಯುಲಸ್, ಕೂಡುವಿಕೆ - ಕಳೆಯುವಿಕೆ, ಗುಣಾಕಾರ - ಭಾಗಾಕಾರಗಳಂತೆ ಪರಸ್ಪರ ವಿರುದ್ಧವಾದವು. ಡಿಫರೆನ್‌ಷಿಯಲ್ ಕ್ಯಾಲ್‌ಕ್ಯುಲಸ್‌ಅನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಆದರೆ ವಿಭಜಿತ ಬಿಂಬಕದಿಂದ, ಸಂಯೋಜಿತ ಬಿಂಬಕಕ್ಕೆ ಹಿಂದಿರುಗುವ ವಿಧಾನ ಸ್ವಲ್ಪ ಕ್ಲಿಷ್ಟಕರವಾದದ್ದು.

ಡಿಫರೆನ್‌ಷಿಯಲ್ ಕ್ಯಾಲ್‌ಕ್ಯುಲಸ್‌ಗೆ ಆಧಾರವಾಗಿರುವ ಪರಿಭಾವನೆಗಳೆಂದರೆ ಲಿಮಿಟ್ಸ್ ಮತ್ತು ಕಂಟಿನ್ಯುಯೇಷನ್. ಮೊದಲು ಇವೆರಡೂ ಪರಿಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

4.3 ಒಂದು ಚಲದ ಲಿಮಿಟ್ ಮತ್ತು ಲಿಮಿಟ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯಗಳು

$Y = f(x)$ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಸ್ವತಂತ್ರ ಚಲ x, ಸ್ವಲ್ಪ - ಸ್ವಲ್ಪ ಹೆಚ್ಚು ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತಾ ಹೋದಂತೆ ಅಥವಾ ಸ್ವಲ್ಪ - ಸ್ವಲ್ಪ ಕಡಿಮೆ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತಾ ಹೋದಂತೆ, ಅದು ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಮಿತಿಯ ಕಡೆಗೆ ಒಲಿಯುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಪಕ್ಷ ಈ ಮಿತಿ 'a' ಎಂಬ ಸ್ಥಿರಾಂಕವಾಗಿದ್ದರೆ ಈ ಬಿಂಬಕದ ಮಿತಿ 'a' ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ :

ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ, ಬಡ್ಡಿದರ ಸೊನ್ನೆಗೆ ಇಳಿಯುವುದೇ ಇಲ್ಲ. ನಾವು ಕೊಡುವ ಸಾಲಕ್ಕೆ ಅಥವಾ ಪಡೆಯುವ ಸಾಲಕ್ಕೆ ಸ್ವಲ್ಪವಲ್ಲ ಸ್ವಲ್ಪ ಬಡ್ಡಿ ಇದ್ದೇ ಇರುತ್ತದೆ. ಕನಿಷ್ಠ ಬಡ್ಡಿ ದರ ಶೇ. 2 ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಈಗ K ಬಂಡವಾಳದ ಪ್ರಮಾಣವಾದರೆ, 'a' ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕವಾದರೆ ಮತ್ತು 'r' ಬಡ್ಡಿ ದರವಾದರೆ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

$$r = 2 + \frac{r}{k}$$

K ಕಡಿಮೆ ಇದ್ದರೆ - r ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುತ್ತದೆ

K ಹೆಚ್ಚಾಗಿದ್ದರೆ - r ಕಡಿಮೆ ಇರುತ್ತದೆ

K ಎಷ್ಟೇ ಹೆಚ್ಚಾದರೂ, r ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಇದನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$\underset{x \to a}{Lim} W, r = 2$$

ಇಲ್ಲಿ K ಅನಂತದ ಕಡೆಗೆ ಸಾಗುತ್ತಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬೇಕು. K, ಅನಂತದ ಕಡೆಗೆ ಸಾಗುತ್ತಾ ಹೋದಂತೆ, r, 2ರ ಕಡೆಗೆ ಚಲಿಸುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತದೆ.

ಹೀಗೆಯೇ Y = f(x) ಬಿಂಬಕದಲ್ಲಿ $x \to \infty$ ಆದಾಗ $y \to a$ ಕಡೆಗೆ ಚಲಿಸುತ್ತದೆ. 'a' ಯನ್ನು ಲಿಮಿಟಿಂಗ್ ಬೆಲೆ (limiting value) ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ.

4.4 ಲಿಮಿಟ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯಗಳು

U, V ಮತ್ತು W ಗಳು X ಚಲದೊಡನೆ ಬಿಂಬಕ ಸಂಬಂಧ ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು

$$\underset{x \to a}{Lim} = A \qquad \underset{x \to a}{Lim} V = B \quad \underset{x \to a}{Lim} W = C$$

ಆಗಿದ್ದರೆ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯಗಳು ನಿಜವಾಗುತ್ತವೆ.

(1) $\lim_{x \to a} (u + v + w) = A + B + C$

(2) $\lim_{x \to a} (uvw) = ABC$

(3) $\lim_{x \to a} \frac{u}{v} = \frac{A}{B}, B \neq 0$

C ಎನ್ನುವುದು ಸ್ಥಿರಾಂಕವಾಗಿರುವಾಗ ಮತ್ತು B ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಮನಾಗಿಲ್ಲದಿರುವಾಗ

(4) $\lim_{x \to a}(u+c) = A+C$

(5) $\lim_{x \to a} cu = CA$

$$\lim_{x \to a}\frac{c}{v} = \frac{C}{B}$$

ಉದಾಹರಣೆ - 1 :

ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂಬಕದ 'ಲಿಮಿಟ್' ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\lim_{x \to 2}(x^2+4x)$$

ಉತ್ತರ : $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$

$$\lim_{x \to 2} 4x = 8$$

ಆದ್ದರಿಂದ $\lim_{x \to 2}(x^2+4) = 12$

ಉದಾಹರಣೆ - 2 :

$\lim_{z \to 2}\frac{(z^2-9)}{z+2}$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\lim_{z \to 2}(z^2-9) = -5$$

$$\lim_{z \to 2}(z+2) = 4$$

$$\therefore \lim_{z \to 2}\frac{(z^2-9)}{Z+2} = \frac{5}{4}$$

ನಿಮ್ಮ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ :

1. $\lim_{z \to 2}\frac{(z^3-9)}{Z+2}$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. $\lim_{y \to 1}\frac{y+1}{y^2-1}$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆ ಒಂದರಲ್ಲಿ

$\lim_{x\to 2}(x^2+4x)=12$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದೆವು.

x = 2 ಹಾಕಿದಾಗ, ಲಿಮಿಟಿಂಗ್ ವ್ಯಾಲ್ಯು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಹೀಗಾದರೆ X = 2 ಆಗಿರುವಾಗ ಬಿಂಬಕ ಕಂಟಿನ್ಯುಯಸ್ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಅಂದರೆ, ಈ ಬಿಂಬಕದ ಬೆಲೆ x = 2 ಆಗಿರುವಾಗ ಕರಾರುವಾಕ್ಕಾಗಿ 12 ಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದೆ. ಹೀಗಿದ್ದರೆ x = 2 ಆಗಿರುವಾಗ ಬಿಂಬಕ 'ಕಂಟಿನ್ಯುಯಸ್' ಆಗಿದೆ ಎಂದರ್ಥ.

ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

ಆಗಿದ್ದರೆ, x = a ಯಲ್ಲಿ ಬಿಂಬಕ ಕಂಟಿನ್ಯುಯಸ್ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ನಿಬಂಧನೆ ತೃಪ್ತಿಯಾಗದಿದ್ದರೆ x = a ಆಗಿರುವಾಗ ಬಿಂಬಕ 'ಡಿಸ್‌ಕಂಟಿನ್ಯುಯಸ್' ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ - 1 :

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$$

x = 1 ಆಗಿದ್ದರೆ, f (x) = f (1) = 3.

X ಒಂದನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುತ್ತಿರುವಾಗ, f (x) ಬಿಂಬಕ 3 ಅನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ x = 1 ಆಗಿರುವಾಗ, ಬಿಂಬಕ 'ಕಂಟಿನ್ಯುಯಸ್' ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ - 2 :

$$f(x) = f(x)=\frac{1}{x^2-a^2}$$

x = a ಯಲ್ಲಿ ಮತ್ತು x = -a ಆಗಿರುವಾಗ ಬಿಂಬಕ 'ಡಿಸ್‌ಕಂಟಿನ್ಯುಯಸ್' ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ x = a ಆದಾಗ ಮತ್ತು x = -a ಆದಾಗ $f(x)=\frac{1}{0}=\infty$ ಆಗುತ್ತದೆ.

6. ಒಂದು ಬಿಂಬಕದ ಡಿಫರೆನ್ಸಿಯೇರ್ಷ :

ಅವಕಲನದ ಮೊದಲನೆಯ ತತ್ವವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ. ಬಿಂಬಕದ ಅವಕಲನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನ :

Y = f (x) ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಸ್ವತಂತ್ರ ಚಲ x ಬೆಲೆಗೆ, Δ x ಎನ್ನುವ ಏರಿಕೆಯನ್ನುಕೊಡೋಣ. ಇದರಿಂದ xನ ಹೊಸ ಬೆಲೆ (x + Δ x) ಆಗುತ್ತದೆ. X, (x + Δ x) ಆದರೆ ಅವಲಂಬಿ ಚಲ Y ಸಹ (y + Δ y) ಏರಿಕೆಯನ್ನು ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ,

$$(Y + \Delta Y) = f(x + \Delta x)$$

$$\Delta Y = f(x + \Delta x) - 4$$

$$\Delta Y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\underset{Lt\,\Delta x \to 0}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \underset{\Delta x \to 0}{Lt} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ಈ ಪರಿಮಿತಿಯು ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, f(x)ಬಿಂಬಕವು x, ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ 'ಡಿಫರೆನ್‌ಷಿಯಬಲ್' ಎಂದು ಅರ್ಥ. $\underset{Lt\,\Delta x \to 0}{\frac{\Delta Y}{\Delta X}}$ ಕೊಡುವ ಸ್ಥಿರಾಂಕ x ಅನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂಬಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಬಿಂಬಕವನ್ನು $\frac{dx}{dy}, f^{1}(x)$, DY ಎಂಬ ಸಂಜ್ಞೆಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಮೇಲಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನಡೆಸುವ ಡಿಫರೆನ್‌ಸಿಯೇಷನ್ ಅನ್ನು ಮೊದಲನೆಯ ತತ್ವವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಾಗುವ ಸ್ಥಿರಾಂಕವೆಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ - 1 :

Y = 10 - x ನ ಡಿಫರೆನ್ಸಿಯೇಷನ್ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ.

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{Lt} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\underset{\Delta x \to 0}{Lt} = \frac{10-(x+\Delta x)-(10-x)}{\Delta x}$$

$$\underset{\Delta x \to 0}{Lt} = \frac{10-(x-\Delta x)-10+x}{\Delta x}$$

$$= \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

ಉದಾಹರಣೆ - 2 :

$Y = x^2 + 3x + 5$ ಆದರೆ, $\frac{dY}{dX}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{Lt} = \frac{\{(x+\Delta x)^2 + 3(x+\Delta x)+5\} - \{x^2+3x+5\}}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{Lt} = \frac{\{(x+\Delta x)^2 + 3(x+\Delta x) - \{x^2+3x+5\}}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{2x\Delta x + (\Delta x^2) + 3\Delta x}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x+3$$

ನಿಮ್ಮ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ

ಡಿಫರೆನ್ಸಿಯೇಷನ್ ಮೊದಲ ತತ್ವವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂಬಕಗಳ $\frac{dy}{dx}$ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. $Y = x^2 + x + 1$
2. $Y = x^3 - x^2 + 2$

ಡಿಫರೆನ್ಸಿಯೇರ್ಷನ ಪ್ರಥಮ ತತ್ವದ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಅನೇಕ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಂಡರೆ ಡಿಫರೆನ್ಸಿಯೇಷನ್ ತುಂಬಾ ಸುಲಭವಾಗುತ್ತದೆ.

$Y = f(x)$ ಬಿಂಬಕಕ್ಕೆ ಕೆಳಗಿನ ನಿಯಮಗಳು ಅನ್ವಯವಾಗುತ್ತವೆ.

ನಿಯಮ - 1 :

$Y = c$ ಆದರೆ ಮತ್ತು C ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕವಾಗಿದ್ದರೆ.

$\frac{dy}{dx}=0$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು : $Y = 6$ ಆದರೆ

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

(2) $Y = 20$ ಆದರೆ

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

(3) $Y = a$ ಆದರೆ, 'a' ಸ್ಥಿರಾಂಕವಾಗಿದ್ದರೆ

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

ನಿಯಮ - 2 : $Y = x^n$ ಆಗಿದ್ದರೆ

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n+1}$$

ಉದಾಹರಣೆ :

(i) $Y = x^6$ ಆದರೆ

$$\frac{dy}{dx} = 6X^5$$

(ii) $Y = X^{10}$ ಆದರೆ,

$$\frac{dy}{dx} = 10\,X^9$$

ನಿಯಮ 3 :

$Y = CX^n$; ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು C ಸ್ಥಿರಾಂಕವಾಗಿದ್ದರೆ,

$$\frac{dy}{dx} = ncx^{n-1}$$

ಉದಾಹರಣೆ :

(i) $Y = 8X^3$ ಆಗಿದ್ದರೆ

$$\frac{dy}{dx} = 24x^2$$

(ii) $Y = 5X^2$

$$\frac{dy}{dx} = 10x$$

ನಿಯಮ - 4 : $Y = U + V$ ಆದರೆ ಮತ್ತು $U = f(x)$ ಮತ್ತು $V = g(x)$ ಆದರೆ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

ಉದಾಹರಣೆ :

(i) $Y = x^3 + x^2$ ಆದರೆ

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2x$$

(ii) $Y = x^3 + x^2 + x + 1$ ಆದರೆ,

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2x + 1$$

ನಿಯಮ - 5 : $Y = U.V$ ಆದರೆ $U = f(x)$ ಮತ್ತು

$V = g(x)$ ಆದರೆ,

$$\frac{dy}{dx} = U.\frac{dv}{dx} + V.\frac{du}{dx}$$

ಉದಾಹರಣೆ :

(i) $Y = (x^3 + 1)(x^4 - 1)$

$$\frac{dy}{dx} = (x^3 + 1)\frac{d}{dx}(x^4 - 1) + (x^4 - 1)\frac{d}{dx}(x^3 + 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = (x^3+1)4x^3 + (x^4-1)3x^2$$

(ii) $Y = (x^2 + x)(x^2 - x - 2)$

$$\frac{dy}{dx} = (x^2 + x)(2x - 1) + (x^2 - x - 2)(2x + 1)$$

ನಿಯಮ - 6 :

$Y = \frac{u}{v}$ ಆದರೆ, $U = f(x)$ ಮತ್ತು $V = g(x)$ ಆಗಿದ್ದರೆ.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{V.\frac{du}{dx} - U.\frac{dv}{dx}}{V^2}$$

ಉದಾಹರಣೆ :

(1) $Y = \frac{(x-3)}{(x-2)}$ ಆಗಿದ್ದರೆ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-2)\frac{d}{dx}(x-3) - (x-3)\frac{d}{dx}(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-2)-(x-3)-(x^2+x-9)(2x)}{(x-1)^2}$$

(ii) $Y = \frac{x^2 + x - 9}{x - 1}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)\frac{d}{dx}(x^2+x-9) - (x^2+x-9)\frac{d}{dx}(x\ \ -1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(x-1)(2x+1) - (x^2+x-9)}{(x-1)^2}$$

ನಿಯಮ - 7 :

$Y = (u)^n$ ಆದರೆ ಮತ್ತು $U = f(x)$ ಆಗಿದ್ದರೆ,

$$\frac{dy}{dx} = n(u)^{n-1}\frac{du}{dx}$$

ಉದಾಹರಣೆ :

(i) $Y = (x^2 + x + 2)^3$ ಆಗಿದ್ದರೆ,

$$\frac{dy}{dx} = 3\,(x^2 + x + 2)^2 . (2x+1)$$

(ii) $(x^2 + 1)^2 (x+1)^3$

$$(x^2 + 1)^2 \frac{d}{dx}(x+1)^3 + (x+1)^3 \frac{d}{dx}(x^2 + 1)^2$$

$$(x^2 + 1)\, 3\,(x+1)^2 + (x+1)^{.3}\, (x^2 + 1)\, 2x$$

ನಿಯಮ- 8 :

$Y = f(u)$ ಮತ್ತು $u = f(x)$ ಆಗಿದ್ದರೆ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

ಉದಾಹರಣೆ :

(i) $Y = 4u^2 + 3u + 1$ ಮತ್ತು $U = x^3 - x^2 + 1$ ಆಗಿದ್ದರೆ.

$$\frac{dy}{du} = 8u + 3 \qquad \frac{du}{dx} = 3x^2 - 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{dx}{dx}$$

$$= (8u + 3)\,(3x^2 - 2x)$$

ಆದರೆ, $U = (x^3 - x^2 + 1)$ ಆದ್ದರಿಂದ

$$\frac{dy}{dx} = \{8(x^3 - x^2 + 1) + 3\}\,\{3x^2 - 2x\}$$

$= (8x^3 - 8x^2 + 8 + 3)\,(3x^2 - 2x)$

$= (8x^3 - 8x^2 + 11)\,(3x^2 - 2x)$

(ii) $Y = U^{1/2}$ ಮತ್ತು $U = x^2 + 1$ ಆದರೆ,

$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-1/2}$ ಮತ್ತು $\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}u^{1/2} \cdot 2x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}u^{1/2} \cdot 2x$

$u = x^2 + 1$ ಆದ್ದರಿಂದ,

$\frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}(2x)$

$= x(x^2+1)^{-1/2}$

4.7 ನಿಮ್ಮ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ

1. ಕ್ಯಾಲ್‌ಕ್ಯುಲಸ್ ಎಂದರೇನು ?
2. $\underset{x\to 2}{Lt}(x^4 + x^3 + x + 1)$ ಮೌಲ್ಯೀಕರಿಸಿ.
3. ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂಬಕಗಳ ಡಿಫರೆನ್ಸಿಯೇಷನ್ ಪಡೆಯಿ

(i) $Y = x^3 + x^2 + 1$

(ii) $Y = (x^3 + 3)^3$

(iii) $Y = (x + 1)\,(x^3 + 3)$

(iv) $Y = 8X^4$

(v) $Y = \frac{(x+1)^2}{(x^2+1)^2}$

(vi) $Y = \frac{(x^4+1)(x^2+1)}{(x+1)}$

(vii) $y = 4u^2 + u^2 + 1$ ಮತ್ತು $U = 4x^3 + 4x^2 + 4$

ಆದರೆ, $\frac{dy}{dx}$ ಪಡೆಯಿರಿ.

4.8 ಸಾರಾಂಶಿಸೋಣ

ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನೀವು ಕ್ಯಾಲ್‌ಕ್ಯುಲಸ್ ಯಾವುದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ್ದು ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಪರಿಚಯ ಮಾಡಿಕೊಂಡಿದ್ದೀರಿ. ಒಂದು ಚಲದ ಲಿಮಿಟ್ ಎಂದರೇನು ? ಕಂಟಿನ್ಯುಯೇಷನ್ ಎಂದರೇನು ? ಒಂದು ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಡಿಫರೆನ್‌ಷಿಯೇಟ್ ಮಾಡಬೇಕಾದರೆ ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕಾದ ಮೂಲ ತತ್ವ ಯಾವುದು ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಕಲಿತುಕೊಂಡಿದ್ದೀರಿ. ಜೊತೆಗೆ ಡಿಫರೆನ್‌ಷಿಯೇಷನ್‌ಗೆ ಅಗತ್ಯವಾದ ಮುಖ್ಯ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಅರಿತುಕೊಂಡಿದ್ದೀರಿ. ಡಿಫರೆನ್‌ಷಿಯೇಷನ್ ಹೇಗೆ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಮುಖ್ಯವಾದುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಮುಂದಿನ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ಓದುತ್ತೀರಿ.

4.9 ಮುಖ್ಯ ಪರಿಭಾವನೆಗಳು

1. **ಡಿಫರೆನ್ಸಿಯೇಷನ್ :** ಸ್ವತಂತ್ರ ಚಲ ಬದಲಾದಾಗ, ಅವಲಂಬಿ ಚಲ ಹೇಗೆ ಬದಲಾವಣೆಗಳನ್ನು ಅನುಭವಿಸುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನ.
2. **ಒಂದು ಚಲದ ಲಿಮಿಟ್ :** $Y = f(x)$ ಬಿಂಬಕದಲ್ಲಿ x ಬದಲಾಗುತ್ತಾ ಹೋದಂತೆ Y ಸಮೀಪಿಸುವ ಸ್ಥಿರಾಂಕ.
3. **ಕಂಟಿನ್ಯುಯೇರ್ಷ :**

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

ಆಗಿದ್ದರೆ, $x = a$ ಯಲ್ಲಿ ಬಿಂಬಕ ಕಂಟಿನ್ಯುಯೇಷನ್ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ.

4. **ಡಿಫರೆನ್ಸಿಯೇಷನ್ ಮೊದಲನೆಯ ತತ್ವ :**

$Y = f(x)$ ಆಗಿದ್ದರೆ

$$(Y + \Delta y) = f(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to o} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to o} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ಸೂತ್ರ. ಇದನ್ನು ಫಸ್ಟ್ ಆರ್ಡರ್ ಡಿಫರೆನ್ಸಿಯೇರ್ಷ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

4.10 ಮುಂದಿನ ಓದಿಗಾಗಿ

ಪಿ.ಕೆ. ರೇಣುಕಾರ್ಯ : *ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಪರಿಮಾಣಾತ್ಮಕ ವಿಧಾನಗಳು: ಚೇತನ ಬುಕ್* ಹೌಸ್, ಅಧ್ಯಾಯ - 3.

*****

ಘಟಕ - 5 : ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರಕ್ಕೆ ಡಿಫರೆನ್ಷಿಯಲ್ ಕ್ಯಾಲುಕ್ಯುಲಸ್ ಅನ್ವಯ - I

ರಚನೆ :

5.1 ಪೀಠಿಕೆ

5.2 ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕಗಳು

5.3 ಆದಾಯ ಬಿಂಬಕಗಳು

5.4 ಬೇಡಿಕೆ ಸ್ಥಿತಿಸ್ಥಾಪಕತ್ವ

5.5 ಬೇಡಿಕೆ ಸ್ಥಿತಿಸ್ಥಾಪಕತ್ವ, ಸರಾಸರಿ ಆದಾಯ ಮತ್ತು ಸೀಮಾಂತ ಆದಾಯಗಳ ನಡುವಣ ಸಂಬಂಧ

5.6 ಆದಾಯಗಳ ವಕ್ರ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕಗಳು

5.7 ವೆಚ್ಚಗಳ ವಕ್ರ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕಗಳು

5.8 ಮುಖ್ಯ ಪರಿಭಾವನೆಗಳು

5.9 ಸ್ವ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

5.10 ಸಾರಾಂಶಿಸೋಣ

5.11 ಮುಂದಿನ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ

5.1 ಪೀಠಿಕೆ

ಹಿಂದಿನ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನಾವು ಬೀಜಗಣಿತ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಡಿಫರೆನ್‌ಷಿಯೇಟ್ ಮಾಡಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ಕಲಿತುಕೊಂಡೆವು. ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಬೀಜ ಗಣಿತ ಬಿಂಬಕಗಳ ಡಿಫರೆನ್‌ಷಿಯೇಷನ್ ಮಾಡುವುದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿದೆವು. ಒಂದು ಬಿಂಬಕದಲ್ಲಿ ಸ್ವತಂತ್ರ ಚಲ ಬದಲಾದಾಗ, ಅದಕ್ಕೆ ಪ್ರತಿಯಾಗಿ ಅವಲಂಬಿ ಚಲ ಯಾವ ಬದಲಾವಣೆಗಳನ್ನು ಅನುಭವಿಸುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ತಿಳಿಯಬೇಕಾದ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ಡಿಫರೆನ್‌ಷಿಯೇಷನ್ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನಾವು ಡಿಫರೆನ್‌ಷಿಯೇಷನ್ ಅನ್ನು ಹೇಗೆ ಆದಾಯ- ವೆಚ್ಚ, ಸ್ಥಿತಿಸ್ಥಾಪಕತ್ವ ಬಿಂಬಕಗಳಲ್ಲಿ ಬಳಸುತ್ತೇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ವಿವರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಯೂನಿಟ್‌ಅನ್ನು ಎಚ್ಚರಿಕೆಯಿಂದ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವುದು ಮುಖ್ಯ. ಏಕೆಂದರೆ ಮುಂದೆ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದಕ್ಕೆ ಇದು ತುಂಬಾ ಸಹಾಯಕವಾಗುತ್ತದೆ.

5.2 ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕಗಳು

$Y = f(x)$ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ y = ಒಟ್ಟು ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಮತ್ತು x ಉತ್ಪಾದನೆಯ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಈಗ $Y = f(x)$ ಎನ್ನುವುದು ಒಟ್ಟು ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತದೆ.

$\frac{y}{x} = \frac{f(x)}{x}$ ಎನ್ನುವುದು ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತದೆ.

$\frac{dy}{dx} = f^1(x)$ ಅಂದರೆ ಒಟ್ಟು ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕದ ಮೊದಲನೆ ಆರ್ಡರ್ ಡಿಫರೆನ್ಸಿಯೇಷನ್, ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ :

$C = x^3 + x^2 + x + 8$ ಎನ್ನುವ ಒಟ್ಟು ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. $x = 1$ ಆಗಿರುವಾಗ, ಒಟ್ಟು ವೆಚ್ಚ, ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚ ಮತ್ತು ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ಒಟ್ಟು ವೆಚ್ಚ $C = x^3 + x^2 + x + 8$

ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚ $\frac{c}{x} = x^2 + x + 1 + \frac{8}{x}$

ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚ $\frac{dc}{dx} = 3x^2 + 2x + 1$

$x = 1$, ಆಗಿರುವಾಗ ಒಟ್ಟು ವೆಚ್ಚ, $C = 11$

$x = 1$, ಆಗಿರುವಾಗ ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚ, $\frac{c}{x} = 11$

$x = 1$, ಆಗಿರುವಾಗ ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚ, $\frac{dc}{dx} = 6$

ಉದಾಹರಣೆ - 2 :

ಕೆಳಗಿನ ಒಟ್ಟು ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕಕ್ಕೆ ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕ ಮತ್ತು ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. $x = 2$ ಆಗಿರುವಾಗ, ಒಟ್ಟು ವೆಚ್ಚ, ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚ ಮತ್ತು ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿ.

ಒಟ್ಟು ವೆಚ್ಚ $C = 3x^3 + 2x^2 + 5x + 8$

ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚ $\frac{c}{x} = 3x^2 + 2x + 5 + \frac{8}{x}$

ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚ $\frac{dc}{dx} = 9x^2 + 4x + 5$

$x = 2$, ಆಗಿರುವಾಗ,

ಒಟ್ಟು ವೆಚ್ಚ $C = 3\,(2)^3 + 2\,(2)^2 + 5\,(2) + 8$

$C = 24 + 8 + 10 + 8 = 50$

ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚ $\frac{c}{x} = 3\,(2)^2 + 2(2) + 5 + \frac{8}{2}$

$= 12 + 4 + 5 + 4$

$= 25.$

ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚ $\frac{dc}{dx} = 9\,(2)^2 + 4\,(2) + 5$

$= 36 + 8 + 5$

$= 49$

5.3 ಆದಾಯ ಬಿಂಬಕಗಳು

$R = f(x)$ ಎಂಬ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ R ಒಟ್ಟು ಆದಾಯವನ್ನು ಮತ್ತು x, ಮಾರಾಟ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ,

$R = f(x)$ ಎನ್ನುವುದು ಒಟ್ಟು ಆದಾಯ ಬಿಂಬಕ.

$\frac{R}{x} = \frac{f(x)}{x}$ ಎನ್ನುವುದು ಸರಾಸರಿ ಆದಾಯ ಬಿಂಬಕ

$\frac{dR}{dx} = f^{1}(x)$ ಎನ್ನುವುದು ಸೀಮಾಂತ ಆದಾಯ ಬಿಂಬಕ

ಉದಾಹರಣೆ - 1 :

$R = x^3 + x^2 + x + 8$ ಎನ್ನುವ ಒಟ್ಟು ಆದಾಯ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಇದಕ್ಕೆ ಸರಾಸರಿ ಆದಾಯ ಬಿಂಬಕ, ಮತ್ತು ಸೀಮಾಂತ ಆದಾಯ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. $X = 1$ಆದಾಗ ಒಟ್ಟು ಆದಾಯ, ಸರಾಸರಿ ಆದಾಯ ಮತ್ತು ಸೀಮಾಂತ ಆದಾಯಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಒಟ್ಟು ಆದಾಯ ಬಿಂಬಕ: $R = x^3 + x^2 + x + 8$

ಸರಾಸರಿ ಆದಾಯ ಬಿಂಬಕ: $\frac{R}{x} = x^2 + x + 1 + \frac{8}{x}$

ಸೀಮಾಂತ ಆದಾಯ : $\frac{dR}{dx} = 3x^2 + 2x + 1$

$X = 1$ ಆದಾಗ ಒಟ್ಟು ಆದಾಯ $= R = 1 + 1 + 1 + 8 = 11$

ಸರಾಸರಿ ಆದಾಯ $= \frac{R}{x} = 1 + 1 + 1 + 8 = 11$

ಸೀಮಾಂತ ಆದಾಯ : $3 + 2 + 1 = 6$

ಉದಾಹರಣೆ - 2:

$R = 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1$ ಎನ್ನುವ ಒಟ್ಟು ಆದಾಯ ಬಿಂಬಕಕ್ಕೆ ಸರಾಸರಿ ಆದಾಯ, ಸೀಮಾಂತ ಆದಾಯ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. $x = 2$ ಆಗಿರುವಾಗ ಸರಾಸರಿ ಆದಾಯವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿ.

ಒಟ್ಟು ಆದಾಯ $R = 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1$

ಸರಾಸರಿ ಆದಾಯ $\frac{R}{x} = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 + \frac{1}{x}$

ಸೀಮಾಂತ ಆದಾಯ $\frac{dR}{dx} = 16x^3 + 9x^2 + 4x + 1$

x = 2, ಆದಾಗ ಒಟ್ಟು ಆದಾಯ, $R = 4(2)^4 + 3(2)^3 + 2(2)^2 + 2 + 1$

$= 64 + 24 + 8 + 2 + 1$

$\mathbf{R = 99}$

ಸರಾಸರಿ ಆದಾಯ $= 4(2)^3 + 3(2)^2 + 2(2) + 1$

$= 32 + 12 + 4 + 1$

$= \mathbf{49}.$

ಸೀಮಾಂತ ಆದಾಯ $= 16(2)^3 + 9(2)2 + 4(2) + 1$

$= 128 + 36 + 8 + 1$

$= \mathbf{173}$

5.4 ಬೇಡಿಕೆ ಸ್ಥಿತಿಸ್ಥಾಪಕತ್ವ

$y = f(x)$ ಎಂಬ ಬೇಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕಕ್ಕೆ ಬೇಡಿಕೆ ಸ್ಥಿತಿಸ್ಥಾಪಕತ್ವವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು

$\frac{Ey}{Ex} = \frac{x}{y}.\frac{dy}{dx}$ ಎಂದು ವಿವರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಇಲ್ಲಿ x = ಸರಕಿನ ಬೆಲೆ

y = ಪ್ರಮಾಣ

$\frac{Ey}{Ex}$ = ಬೇಡಿಕೆ ಸ್ಥಿತಿ ಸ್ಥಾಪಕತ್ವ

$\frac{dy}{dx}$ - ಎನ್ನುವುದು $y = f(x)$ ಬಿಂಬಕದ ಮೊದಲನೇ ಆರ್ಡರ್ ಡಿಫರೆನ್ಸಿಯೇಷನ್

ಉದಾಹರಣೆ - 1 :

$Y = 86 - 25x$ ಎನ್ನುವ ಬೇಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕಕ್ಕೆ $x = 2$ ಆಗಿರುವಾಗ, ಬೇಡಿಕೆ ಸ್ಥಿತಿ ಸ್ಥಾಪಕತ್ವವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

$y = 86 - 25x$ ಬಿಂಬಕದಲ್ಲಿ $x = 2$, ಆಗಿರುವಾಗ $y = 86 - 50 = 36.$

$x = 2, y = 36$ ಅಂಶದಲ್ಲಿ ಬೇಡಿಕೆ ಸ್ಥಿತಿಸ್ಥಾಪಕತ್ವ.

$$\frac{Ey}{Ex} = \frac{x}{y}.\frac{dy}{dx}$$

$y = 86 - 25x$ ಬಿಂಬಕಕ್ಕೆ

$$\frac{dy}{dx} = -25$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{Ey}{Ex} = \frac{2}{36} X - 25$

$$= \frac{-50}{36} = -1.3$$

ಉದಾಹರಣೆ - 2 :

$Y = 2x^3 + x^2 + 1$

ಎಂಬ ಬೇಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕಕ್ಕೆ $x = 1$ ಆಗಿರುವಾಗ ಬೇಡಿಕೆ ಸ್ಥಿತಿ ಸ್ಥಾಪಕತ್ವವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ :

$Y = -2x^3 + x^2 + 4$ ಎಂಬ ಬಿಂಬಕದಲ್ಲಿ $x = 1$ ಆಗಿರುವಾಗ $y = -2 + 1 + 4 = 2$

ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು $\frac{dy}{dx} = -6x^2 + 2x$

ಇಲ್ಲಿ $x = 1$, ಆಗಿದ್ದರೆ $\frac{dy}{dx} = -6 + 2 = -4$

ಬೇಡಿಕೆ ಸ್ಥಿತಿ ಸ್ಥಾಪಕತ್ವ : $\frac{Ey}{Ex} = \frac{x}{y} . \frac{dy}{dx}$

$\frac{Ey}{Ex} = \frac{1}{2}$ x -4 = -2

ನಿಮ್ಮ ಪ್ರಗತಿ ಪರಿಶೀಲಿಸಿ :

1. $Y = x4 + 3x^3 + 2x^2 + 1$ ಎನ್ನುವ ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕಕ್ಕೆ $x = 2$ ಆಗಿರುವಾಗ ಒಟ್ಟು ವೆಚ್ಚ, ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚ ಮತ್ತು ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿ.
2. $Y = 5 - 3x^2 - x$ ಬಿಂಬಕಕ್ಕೆ $x = 2$ ಆಗಿರುವಾಗ ಒಟ್ಟು ಆದಾಯ, ಸರಾಸರಿ ಆದಾಯ ಮತ್ತು ಸೀಮಾಂತ ಆದಾಯಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿ. ಇದಕ್ಕೆ ಬೇಡಿಕೆ ಸ್ಥಿತಿ ಸ್ಥಾಪಕತ್ವವನ್ನು ಸಹ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿ.

5.5 ಬೇಡಿಕೆ ಸ್ಥಿತಿ ಸ್ಥಾಪಕತ್ವ, ಸರಾಸರಿ ಆದಾಯ ಮತ್ತು ಸೀಮಾಂತ ಆದಾಯಗಳ ನಡುವಣ ಸಂಬಂಧ

ಸರಾಸರಿ ಆದಾಯ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಬೇಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕ, ಬೆಲೆ ಬಿಂಬಕ ಎಂದು ಸಹ ಹೇಳಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$P = 10 - 5x$ ಎನ್ನುವ ಬೇಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕವನ್ನು, ಸರಾಸರಿ ಆದಾಯ ಬಿಂಬಕ, ಬೇಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕ ಮತ್ತು ಬೆಲೆ ಬಿಂಬಕವೆಂದು ಸಹ ಹೇಳಬಹುದು. ಕೆಳಗಿನ ಸಂಬಂಧ ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

ಬೆಲೆ x ಬೇಡಿಕೆಯ ಪ್ರಮಾಣ = ಒಟ್ಟು ಆದಾಯ

ಆದ್ದರಿಂದ $PxX = R$

$R = Px$..... ಎನ್ನುವುದು ಒಟ್ಟು ಆದಾಯ ಬಿಂಬಕ.

$\frac{\text{ಒಟ್ಟು ಆದಾಯ}}{\text{ಮಾರಾಟದ ಪ್ರಮಾಣ}}$ = ಸರಾಸರಿ ಆದಾಯ ಎನ್ನುವುದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{R}{x} = P$ ..... ಎನ್ನುವುದು ಸರಾಸರಿ ಆದಾಯ ಬಿಂಬಕ

ಮೊದಲನೆಯ ಡಿಫರೆನ್‌ಷಿಯಲ್, ಸೀಮಾಂತ ಆದಾಯವನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ,

$\frac{dR}{dx}$ ಸೀಮಾಂತ ಆದಾಯವನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಮಗೆ ಬೆಲೆ ಬಿಂಬಕ ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ, ಅದರಿಂದ ಒಟ್ಟು ಆದಾಯ ಬಿಂಬಕ ಮತ್ತು ಸೀಮಾಂತ ಆದಾಯ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ :

ಕೆಳಗಿನ ಬೆಲೆ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

$P = -5x^2 + 3x + 8$. ಇದು ಸರಾಸರಿ ಆದಾಯ ಬಿಂಬಕ ಸಹ. ಆದ್ದರಿಂದ ಒಟ್ಟು ಆದಾಯ ಬಿಂಬಕ $= Px = -5x^3 + 3x^2 + 8x$

ಅಥವಾ $R = -5x^3 + 3x^2 + 8x$

ಮತ್ತು ಸೀಮಾಂತ ಆದಾಯ ಬಿಂಬಕ $= \frac{dR}{dx} = -15x^2 + 6x + 8$

ಈಗ ಸರಾಸರಿ ಆದಾಯ, ಸೀಮಾಂತ ಆದಾಯ ಮತ್ತು ಬೇಡಿಕೆ ಸ್ಥಿತಿ ಸ್ಥಾಪಕತ್ವಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಗಣಿತೀಯ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ನೋಡೋಣ;

ಕೆಳಗಿನ ಬೇಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಅಥವಾ ಸರಾಸರಿ ಆದಾಯ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

$P = f(Q_d)$

ಇಲ್ಲಿ Q_d ಬೇಡಿಕೆಯ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಮತ್ತು P ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಒಟ್ಟು ಆದಾಯ ಬಿಂಬಕ

$P \times Q_d = f(Qd) \times p$

ಅಥವಾ $R = P \times f(Q_d)$

ಸೀಮಾಂತ ಆದಾಯ $= \dfrac{dR}{dQ_d} = Qd.\dfrac{dp}{dQ_d} + P$

$$= P\left[\frac{Q_d}{P}.\frac{dP}{dQ_d} + 1\right]$$

ನಮಗೆ ಬೇಡಿಕೆ ಸ್ಥಿತಿಸ್ಥಾಪಕತ್ವದ ಸೂತ್ರ ತಿಳಿದಿದೆ. ಅದನ್ನು

$E_d = \dfrac{1}{\dfrac{P}{Q_d} x \dfrac{dQ_d}{dP}}$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು

$$= \frac{Qd}{P} x \frac{1}{\dfrac{dQ_d}{dP}}$$

ಆದರೆ, $= \dfrac{1}{\dfrac{dQ_d}{dP}} = \dfrac{dP}{dQ_d}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $= \dfrac{1}{Ed} = \dfrac{Qd}{P} \times \dfrac{dP}{dQ_d}$ ಇದರಿಂದಾಗಿ,

ಸೀಮಾಂತ ಆದಾಯ $= P = \left[1 + \dfrac{1}{Ed}\right]$

5.6 ಆದಾಯಗಳ ವಕ್ರ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕಗಳು

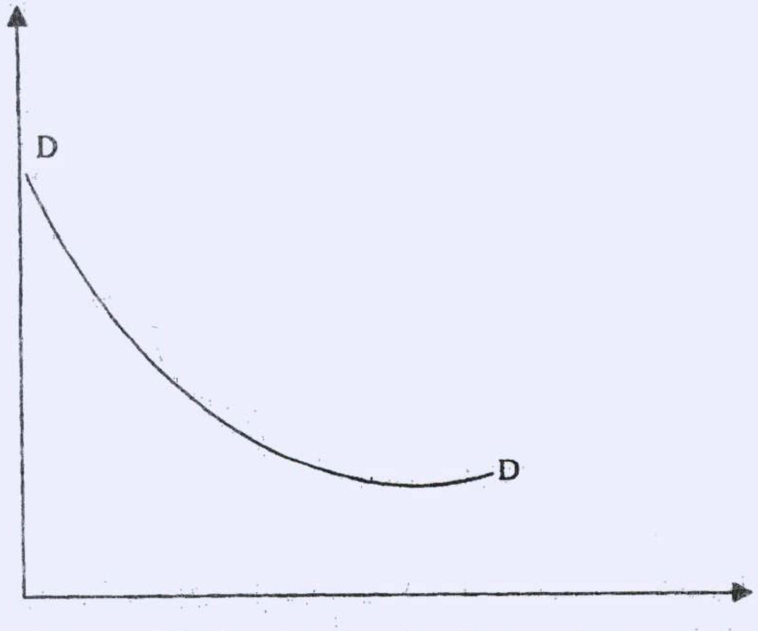
$Y = ax^2 + bx + c$ ಎನ್ನುವ ಬೇಡಿಕೆ ರೇಖೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಇದರ ಒಟ್ಟು ಆದಾಯ ಬಿಂಬಕ ;

$Y \times X = R = ax^3 + bx^2 + cx$ ಆಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಸೀಮಾಂತ ಆದಾಯ ಬಿಂಬಕ

$$\frac{dR}{dx} = 3ax^2 + 2bx + c$$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಒಟ್ಟು ಆದಾಯವನ್ನು ಗರಿಷ್ಠಗೊಳಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಮುಂದೆ ನೋಡುತ್ತೇವೆ. ಬೇಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕ ಮೇಲಿನಂತೆ ಪ್ಯಾರಾಬೊಲಾ ಆಗಿರುವಾಗ ಅದರ ನಕ್ಷೆ ಕೆಳಗಿನಂತಿರುತ್ತದೆ.



ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಮಾರುಕಟ್ಟೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸರಕಿನ ಬೇಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕ ಅಂದರೆ ಸರಾಸರಿ ಆದಾಯ ಬಿಂಬಕ, ವಕ್ರ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅದು ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಯಾವುದೇ ವಕ್ರ ರೇಖಾ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಬೇಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕ, ಪ್ಯಾರಾಬೊಲಾ ಆಗಿರಬಹುದು, ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಾ ಆಗಿರಬಹುದು ಅಥವಾ ವೃತ್ತ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ಪಡೆದಿರಬಹುದು. ಬೇಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕ ಯಾವ ರೂಪದ್ದಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದು, ಬೆಲೆ ಮತ್ತು ಬೇಡಿಕೆ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸುತ್ತದೆ.

5.7 ವಕ್ರ ರೇಖೆ ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕಗಳು

ವೆಚ್ಚ ರೇಖೆಗಳು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ವಕ್ರ ರೇಖೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಕೆಳಗಿನ ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

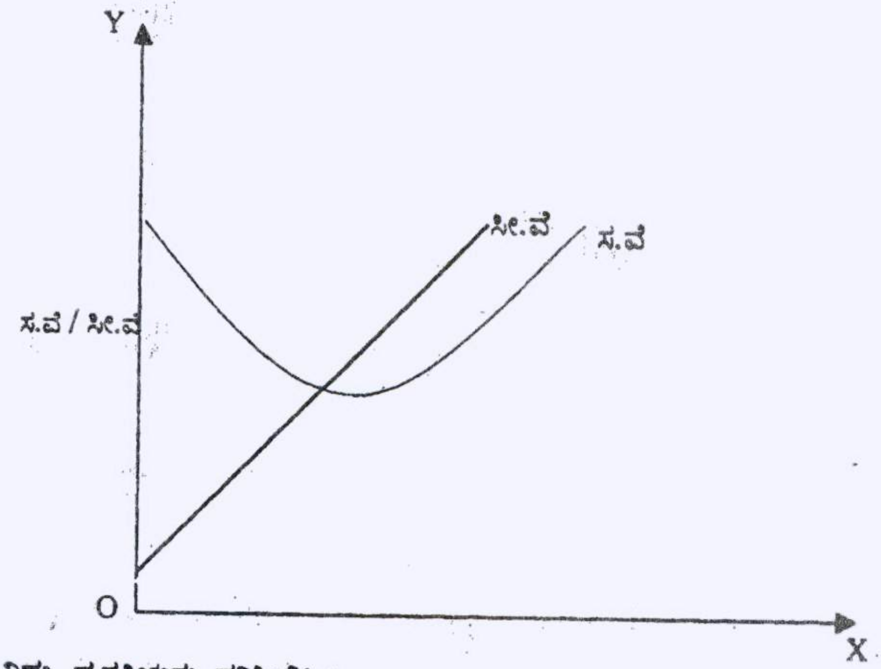
$Y = ax^2 + bx + c$

ಇಲ್ಲಿ $Y =$ ಒಟ್ಟು ವೆಚ್ಚ

$x =$ ಉತ್ಪಾದನೆಯ ಪ್ರಮಾಣ ಮತ್ತು a, b, c ಗಳು ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳಾಗಿವೆ.

ಈಗ ಒಟ್ಟು ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕ $Y = ax^2 + bx + c$ ಆದರೆ ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕ $\frac{y}{x} = ax + b + \frac{c}{x}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕ $\frac{dy}{dx} = 2ax + b$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಇಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ಅಂಶವೆಂದರೆ, ಒಟ್ಟು ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕ ಪ್ಯಾರಾಬೊಲಾ ಆಗಿದೆ. ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕ ಸರಳ ರೇಖೆಯಾಗಿದೆ. ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಮೂಡಿಸಿದರೆ, ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚ ರೇಖೆ ಮತ್ತು ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚ ರೇಖೆಗಳು ಕೆಳಗಿನಂತಿರುತ್ತವೆ.



ನಿಮ್ಮ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ :

1. $Y = -2x^2 + x + 10$ ಎಂಬ ಬೇಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕಕ್ಕೆ $x = 2$ ಆಗಿರುವಾಗ ಬೇಡಿಕೆ ಸ್ಥಿತಿ ಸ್ಥಾಪಕತ್ವವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. $Qd = 10 - 5x$ ಬಿಂಬಕಕ್ಕೆ ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚ, ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚ ಮತ್ತು ಬೇಡಿಕೆ ಸ್ಥಿತಿ ಸ್ಥಾಪಕತ್ವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ ತೋರಿಸಿ.

5.8 ಮುಖ್ಯ ಪರಿಭಾವನೆಗಳು

ಬೇಡಿಕೆ ಸ್ಥಿತಿಸ್ಥಾಪಕತ್ವದ ಅಳತೆ.

$Q_d = f(p)$ ಆಗಿರುವಾಗ,

$$\text{ಬೇಡಿಕೆ ಸ್ಥಿತಿ ಸ್ಥಾಪಕತ್ವ} = \frac{P}{Q_d} \cdot \frac{dQ_d}{dP}$$

5.9 ಸ್ವಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

1. ಬೇಡಿಕೆ ಸ್ಥಿತಿಸ್ಥಾಪಕತ್ವದ ಗಣಿತೀಯ ಸೂತ್ರ ನೀಡಿ.
2. ಸರಾಸರಿ ಆದಾಯ, ಸೀಮಾಂತ ಆದಾಯ ಮತ್ತು ಬೇಡಿಕೆ ಸ್ಥಿತಿಸ್ಥಾಪಕತ್ವಗಳ ನಡುವಣ ಗಣಿತೀಯ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ ತೋರಿಸಿ.
3. ಸರಾಸರಿ ಆದಾಯ ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕವಾಗಿರುವಾಗ, ಅದರ, ಸೀಮಾಂತ ಆದಾಯ ಬಿಂಬಕ ಹೇಗಿರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯೊಡನೆ ವಿವರಿಸಿ.

5.10 ಸಾರಾಂಶೀಕರಣ

ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನೀವು ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರಕ್ಕೆ ಡಿಫರೆನ್‌ಷಿಯಲ್ ಕ್ಯಾಲ್‌ಕ್ಯುಲಸ್‌ನ ಕೆಲವು ಅನ್ವಯಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ್ದೀರಿ. ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಆದಾಯ, ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕಗಳು ವಕ್ರ ರೇಖೆಗಳಾಗಿರುವಾಗ ಅವುಗಳ ಸ್ವರೂಪ ಹೇಗಿರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಪರಿಚಯ ಮಾಡಿಕೊಂಡಿರಿ. ಬೆಲೆ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ, ಅದರಿಂದ ಒಟ್ಟು ಆದಾಯ ಮತ್ತು ಸೀಮಾಂತ ಆದಾಯ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ್ದೀರಿ. ಕೊಡಲಾಗಿರುವ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಇವುಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಸಹ ನೋಡಿದಿರಿ. ಆದಾಯದಷ್ಟೇ ಮುಖ್ಯವಾದ ಆರ್ಥಿಕ ಪರಿಭಾವನೆ, ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕ ಒಟ್ಟು ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕದಿಂದ ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚ, ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ನಾವು ಕಲಿತುಕೊಂಡೆವು. ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚ, ಬೇಡಿಕೆ ಸ್ಥಿತಿಸ್ಥಾಪಕತ್ವ ಮತ್ತು ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಗಣಿತ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಂಡೆವು. ಇಲ್ಲಿ ನೀವು ಕಲಿತುಕೊಂಡಿರುವ ಆದಾಯ-ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕಗಳು ಬಹಳ ಮುಖ್ಯವಾದವು. ಆರ್ಥಿಕ ತತ್ವಗಳಲ್ಲಿ ಇವುಗಳನ್ನು ಮುಂದೆ ಬಹಳವಾಗಿ ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

5.11 ಮುಂದಿನ ಓದಿಗಾಗಿ

ಸಿ.ಕೆ. ರೇಣುಕಾರ್ಯ : ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಪರಿಮಾಣಾತ್ಮಕ ವಿಧಾನಗಳು, ಅಧ್ಯಾಯ - 2.

*****

ಘಟಕ - 6 : ಬಿಂಬಕ ಮತ್ತು ಬಿಂಬಕ ಸಂಬಂಧಗಳು

ಪರಿವಿಡಿ :

6.1 ಪ್ರವೇಶಿಕ

ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ಈಗಾಗಲೇ ಕಲಿತಿರುವ ಡಿಫರೆನ್ಷಿಯಲ್ ಕ್ಯಾಲ್ಕ್ಯುಲಸ್‌ನ ಅತಿ ಮುಖ್ಯ ಉಪಯೋಗವೊಂದನ್ನು ಕಲಿಯುತ್ತೇವೆ. ಅದೆಂದರೆ ಒಂದು ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಗರಿಷ್ಠಗೊಳಿಸುವುದು ಅಥವಾ ಕನಿಷ್ಠಗೊಳಿಸುವುದು. ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಇದರ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆಯನ್ನು ಒತ್ತಿ ಹೇಳಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ, ಆರ್ಥಿಕ ಚಲಗಳನ್ನು ಗರಿಷ್ಠಗೊಳಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠಗೊಳಿಸುವುದು ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರ ಅಧ್ಯಯನದ ಮುಖ್ಯ ಉದ್ದೇಶಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ನಾವು ತುಷ್ಟಿಗುಣ, ಉತ್ಪಾದನೆ, ಉತ್ಪಾದನ ಆದಾಯ, ಆತನ ಲಾಭ ಇವುಗಳನ್ನು ಗರಿಷ್ಠಗೊಳಿಸಲು ಇಚ್ಛಿಸುತ್ತೇವೆ. ಹಾಗೆಯೇ ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚ, ನಷ್ಟ, ಹಣದುಬ್ಬರ ಮುಂತಾದವುಗಳನ್ನು ಕನಿಷ್ಠಗೊಳಿಸಲು ಇಚ್ಛಿಸುತ್ತೇವೆ. ಡಿಫರೆನ್ಷಿಯಲ್ ಕ್ಯಾಲ್ಕ್ಯುಲಸ್, ಈ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ತುಂಬಾ ಸುಲಭವಾಗಿ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಹೇಗೆ ಗರಿಷ್ಠಗೊಳಿಸಬಹುದು ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಹೇಗೆ ಕನಿಷ್ಠಗೊಳಿಸಬಹುದು ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಮುಂದಿನ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಇದನ್ನು ಅನ್ವಯಗೊಳಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

6.2 ಅನುಕ್ರಮ ಅವಕಲನ (ಸಕ್ಸೆಸಿವ್ ಡಿಫರೆನ್ಷಿಯೇಷನ್)

ಒಂದು ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಅವಕಲನ ಮಾಡಿದಾಗ ಮೊದಲು ಬರುವ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಫಸ್ಟ್ ಆರ್ಡರ್ ಡಿಫರೆನ್ಷಿಯೇಷನ್ ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಪಕ್ಷ ಫಸ್ಟ್ ಆರ್ಡರ್ ಡಿರೈವೇಷನ್ ಆಗಿರುವ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಮತ್ತೆ ಡಿಫರೆನ್ಷಿಯೇಷನ್ ಮಾಡಬಹುದಾದರೆ, ಬರುವ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಸೆಕೆಂಡ್ ಆರ್ಡರ್ ಡಿಫರೆನ್ಷಿಯೇಷನ್ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಬಿಂಬಕವೂ ಅವಕಲನಕ್ಕೆ ಒಳಪಡಬಹುದು. ಹೀಗೆ ನಡೆಯುವ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಸಕ್ಸೆಸಿವ್ ಡಿಫರೆನ್ಷಿಯೇಷನ್ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ;

ಉದಾಹರಣೆ - 1:

$$Y = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 8x + 10$$

ಮೊದಲನೆಯ ಆರ್ಡರ್ ಡಿಫರೆನ್ಷಿಯೇಷನ್ : $\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 6x^2 + 6x + 8$

ಎರಡನೆಯ ಆರ್ಡರ್ ಡಿಫರೆನ್ಷಿಯೇಷನ್ : $\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 + 6$

ಥರ್ಡ್ ಆರ್ಡರ್ ಡಿಫರೆನ್ಷಿಯೇಷನ್ : $\frac{d^3y}{dx^3} = 24x$

ನಾಲ್ಕನೆಯ ಆರ್ಡರ್ ಡಿಫರೆನ್ಶಿಯೇಷ್ನ $\frac{d^4y}{dx^4}=24$

ಉದಾಹರಣೆ - 2:

$$Y=10x^5+15x^4+12x^3+8x^2+8x+1$$

ಮೊದಲನೆಯ ಆರ್ಡರ್ ಡಿಫರೆನ್ಶಿಯೇಷ್ನ :

$$\frac{dy}{dx}=50x^4+60x^3+36x^2+16x+8$$

ಎರಡನೆಯ ಆರ್ಡರ್ ಡಿಫರೆನ್ಶಿಯೇಷ್ನ : $\frac{d^2y}{dx^2}=200x^3+180x^2+72x+16$

ಮೂರನೆಯ ಆರ್ಡರ್ ಡಿಫರೆನ್ಶಿಯೇಷ್ನ : $\frac{d^3y}{dx^3}=600x^2+360x+72$

ನಾಲ್ಕನೆಯ ಆರ್ಡರ್ ಡಿಫರೆನ್ಶಿಯೇಷ್ನ : $\frac{d^4x}{dx^4}=1200x+360$

ಐದನೆಯ ಆರ್ಡರ್ ಡಿಫರೆನ್ಶಿಯೇಷ್ನ : $\frac{d^5y}{dx^5}=1200$

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ, ಮೊದಲನೆಯ ಆರ್ಡರ್ ಡಿಫರೆನ್ಶಿಯೇಷ್ನ ಮೂಲ ಬಿಂಬಕದ ಓಟದ ಗತಿಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಸ್ವತಂತ್ರ ಚಲ X ಬದಲಾದಾಗ, ಅವಲಂಬಿ ಚಲ Y ಯಾವ ಬದಲಾವಣೆಗಳನ್ನು ಅನುಭವಿಸುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಅದು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಮೇಲಿನ ಎರಡೂ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿರುವ ಬಿಂಬಕಗಳು ವಕ್ರ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕಗಳು ಎನ್ನುವುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸಬೇಕು. ಹೀಗಾಗಿ ಈ ಬಿಂಬಕಗಳ ಓಟದ ಗತಿಗಳು ಸ್ಥಿರಾಂಕವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ xನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗೆ ನಮಗೆ ಓಟದ ಗತಿ ಅವಶ್ಯಕವಿದೆಯೋ ಅದನ್ನು ನಾವು ಆ ಬೆಲೆಗೆ ಮಾತ್ರ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬೇಕು. ಉದಾಹರಣೆ - 1ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿಯ ಮೂಲ ಬಿಂಬಕ,

$$Y=x^4+2x^3+3x^2+8x+10$$

ಒಂದು ವಕ್ರ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕ. ಇದರ ಓಟದ ಗತಿಯನ್ನು $\frac{dy}{dx}$ ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, $\frac{dy}{dx}=4x^3+6x^2+6x+8$ ಓಟದ ಗತಿಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಯಾವ xನ ಬೆಲೆಗೆ ಓಟದ ಗತಿ ಬೇಕೋ ಅದನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬೇಕು. ಉದಾಹರಣೆ, x = 1 ಆದಾಗ,

$$\frac{dy}{dx} = 4+6+6+8 = 24$$ ಆಗುತ್ತದೆ.

X = 2ರ ಬೆಲೆಗೆ $\frac{dy}{dx} = 32+24+12+8 = 76$

ಆದ್ದರಿಂದ, x = 1, ಆದಾಗ, ಈ ಬಿಂಬಕದ ಓಟದ ಗತಿ 24 ಮತ್ತು x=2, ಆದಾಗ, ಇದರ ಓಟದ ಗತಿ 76 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

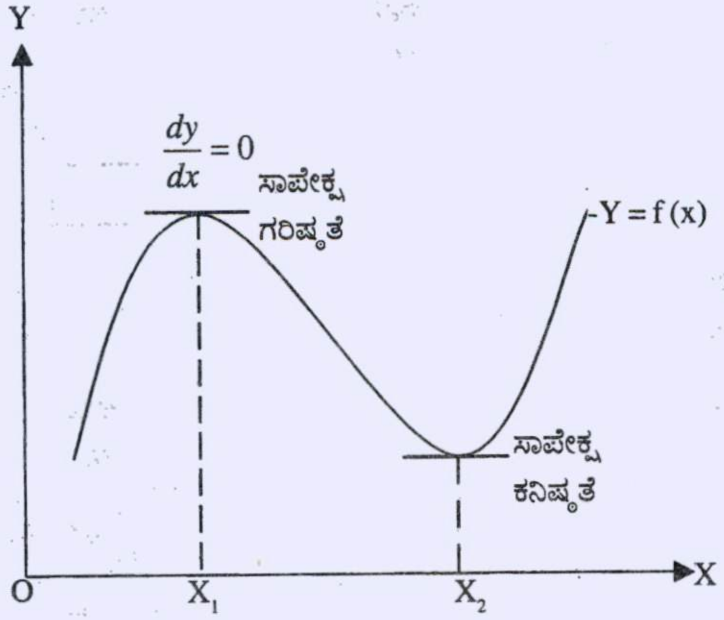
6.3 ನಿಮ್ಮ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ

$y = x^3 + 10x^2 + 8x + 8$ ಬಿಂಬಕಕ್ಕೆ $\frac{d^3y}{dx^3}$ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

x=1 ಮತ್ತು 2 ಆಗಿರುವಾಗ $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6.4 ಒಂದು ಬಿಂಬಕದ ಗರಿಷ್ಠತೆ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠತೆ

y = f(x) ಎನ್ನುವ ಒಂದು ವಕ್ರ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಅದರ ನಕ್ಷಾ ನಿರೂಪಣೆ ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ.



Y = f(x) ಎನ್ನುವ ಬಿಂಬಕ ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಮೂಡಿದಾಗ ತನ್ನ ಪಥದಲ್ಲಿ ಸಾಪೇಕ್ಷ ಗರಿಷ್ಠತೆ ಮತ್ತು ಸಾಪೇಕ್ಷ ಕನಿಷ್ಠತೆಗಳನ್ನು ಅನುಭವಿಸುತ್ತಿದೆ. x_1ನಲ್ಲಿ ಅದು ಸಾಪೇಕ್ಷ ಗರಿಷ್ಠತೆಯನ್ನು ಮತ್ತು x_2 ವಿನಲ್ಲಿ ಸಾಪೇಕ್ಷ ಕನಿಷ್ಠತೆಯನ್ನು ಈ ರೇಖೆ ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತಿದೆ. ಯಾವುದೇ ರೇಖೆ ತನ್ನ ಪಥದಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಠತೆಯನ್ನು ಅಥವಾ ಕನಿಷ್ಠತೆಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿ

ನಂತರ ತನ್ನ ಪಥವನ್ನು ಬದಲಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಾಪೇಕ್ಷ ಗರಿಷ್ಠತೆ ಅಥವಾ ಕನಿಷ್ಠತೆಗೆ ಅಗತ್ಯವಿರುವ ಮೊದಲನೆಯ ನಿಬಂಧನೆ $\frac{dy}{dx}=0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ನಿಬಂಧನೆ ಪೂರ್ತಿಯಾದ ನಂತರ, ಅಂದರೆ xನ ಯಾವುದಾದರೂ ಬೆಲೆಗೆ $\frac{dy}{dx}=0$ ಸಮನಾದರೆ, ರೇಖೆ ತನ್ನ ಓಟದ ಗತಿಯನ್ನು ಬದಲಿಸುತ್ತಿದೆ ಎಂದರ್ಥ. ಇದಾದ ನಂತರ, ರೇಖೆ ಕೆಳಮುಖವಾಗಿ ಅಥವಾ ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ಚಲಿಸಬಹುದು. $\frac{dy}{dx}$ ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಮನಾಗಿರುವ ಬಿಂಬಕದ ಓಟದ ಗತಿಯನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಅಂದರೆ, ರೇಖೆ, ಸೊನ್ನೆ ಓಟದ ಗತಿಯನ್ನು ಪಡೆದ ನಂತರ ಕೆಳಮುಖವಾಗಿ ಚಲಿಸುತ್ತದೆಯೇ, ಅಥವಾ ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ಚಲಿಸುತ್ತದೆಯೇ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ತೀರ್ಮಾನಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯ. ಅಂದರೆ, $\frac{dy}{dx}$ ಯಾವ xನ ಬೆಲೆಗೆ ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಮನಾಗಿದೆಯೋ, ಅದೇ ಬೆಲೆಗೆ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ಸೊನ್ನೆಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದ್ದರೆ, ಅಂದರೆ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿದ್ದರೆ, x_1 ಬೆಲೆಗೆ ಬಿಂಬಕ ಕನಿಷ್ಠಗೊಳ್ಳುತ್ತಿದೆ ಎಂದೂ, ಒಂದು ಪಕ್ಷ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ಸೊನ್ನೆಗಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಿದ್ದರೆ ಬಿಂಬಕ, ಗರಿಷ್ಠಗೊಳ್ಳುತ್ತಿದೆಯೆಂದೂ ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಗಮನಿಸುವುದು ಅನುಕೂಲಕರ.

$y=f(x)$ ಬಿಂಬಕಕ್ಕೆ

	ಗರಿಷ್ಠಕ್ಕೆ	ಕನಿಷ್ಠಕ್ಕೆ
ಮೊದಲನೆಯ ನಿಬಂಧನೆ (ಯಾವುದಾದರೂ x ನ ಬೆಲೆಗೆ)	$\frac{dy}{dx}=0$	$\frac{dy}{dx}=0$
ಎರಡನೆಯ ನಿಬಂಧನೆ	ಆಗಿರಬೇಕು ಮತ್ತು xನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗೆ $\frac{dy}{dx}=0$ ಸಮನಾಗಿತ್ತೋ ಅದೇ ಬೆಲೆಗೆ $\frac{d^2y}{dx^2}\langle 0$ ಆಗಿರಬೇಕು	ಆಗಿರಬೇಕು ಮತ್ತು xನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗೆ $\frac{dy}{dx}=0$ ಸಮನಾಗಿತ್ತೋ ಅದೇ ಬೆಲೆಗೆ $\frac{d^2y}{dx^2}\rangle 0$ ಆಗಿರಬೇಕು

ಉದಾಹರಣೆ - 1:

$Y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ ಬಿಂಬಕ, ಆಗಬೇಕು

xನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗೆ ಕನಿಷ್ಠವಾಗುತ್ತದೆ ಅಥವಾ ಗರಿಷ್ಠವಾಗುತ್ತದೆ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

ಬಿಂಬಕ : $Y = x^2 - 6x^2 + 9x + 1$

ಮೊದಲನೆಯ ನಿಬಂಧನೆ $\frac{dy}{dx} = 0$, ಆಗಬೇಕು

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

ಎನ್ನುವುದು ಒಂದು ಕ್ವಾಡ್ರಾಟಿಕ್ ಸಮೀಕರಣ. ಅವ್ಯಕ್ತ ಚಲ x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ಕಲಿತಿರುವ ಸೂತ್ರ,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ ವನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು.

ಇಲ್ಲಿ,

$a = 3, b = -12, c = 9$ ಆಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $x = \frac{12 \pm \sqrt{(144)(-4 \times 3 \times 9)}}{2 \times 3}$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 108}}{2 \times 3}$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{36}}{6}$$

$$x = \frac{12 \pm 6}{6}$$

ಆದ್ದರಿಂದ xಗೆ ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳಿವೆ.

ಒಂದು $x = \frac{12 + 6}{6}$, $x = \frac{12 - 6}{6}$

$$x = \frac{18}{6} = 3, x = \frac{6}{6} = 1$$

ಅಂದರೆ x=3 ಮತ್ತು x=1 ಆಗಿರುವಾಗ ರೇಖೆ ತನ್ನ ಪಥವನ್ನು ಬದಲಿಸುತ್ತಿದೆ. x=3 ಮತ್ತು x=1 ಕನಿಷ್ಠವೋ, ಗರಿಷ್ಠವೋ ಎನ್ನುವುದನ್ನು 2ನೆಯ ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿದ ನಂತರ ಮಾತ್ರ ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 9$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 12$$

x = 3 ಆಗಿರುವಾಗ,

$$6x - 12 = 18 - 12 = 6 > 0$$

ಆದ್ದರಿಂದ, x = 3 ಎನ್ನುವ ಅಂಶದಲ್ಲಿ ಬಿಂಬಕ ಕನಿಷ್ಠವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ,

x = 1 ಆಗಿರುವಾಗ,

$$6x - 12 = 6 - 12 = -6 < 0$$

ಆದ್ದರಿಂದ, x = 1ಆಗಿರುವಾಗ ಬಿಂಬಕ ಗರಿಷ್ಠವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ - 2 :

$$Y = 25 - 8x + x^2$$

ಬಿಂಬಕ ಯಾವಾಗ ಕನಿಷ್ಠತೆಯನ್ನು ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

ಮೊದಲನೆಯ ನಿಬಂಧನೆ : $\frac{dy}{dx} = 0$

$Y = 25 - 8x + x^2$ ಆದರೆ,

$$\frac{dy}{dx} = -8x + 2x$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೊದಲನೆಯ ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿದರೆ,

$$-8 + 2x = 0$$
$$2x = 8$$
$$x = 4$$

x = 4 ಆದಾಗ, ಬಿಂಬಕದ ರೇಖೆ ತನ್ನ ಪಥವನ್ನು ಬದಲಿಸುತ್ತಿದೆ.

ಈಗ ಎರಡನೆಯ ನಿಬಂಧನೆಯ ಪ್ರಕಾರ,

$$\frac{dy}{dx} = -8 + 2x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 > 0$$

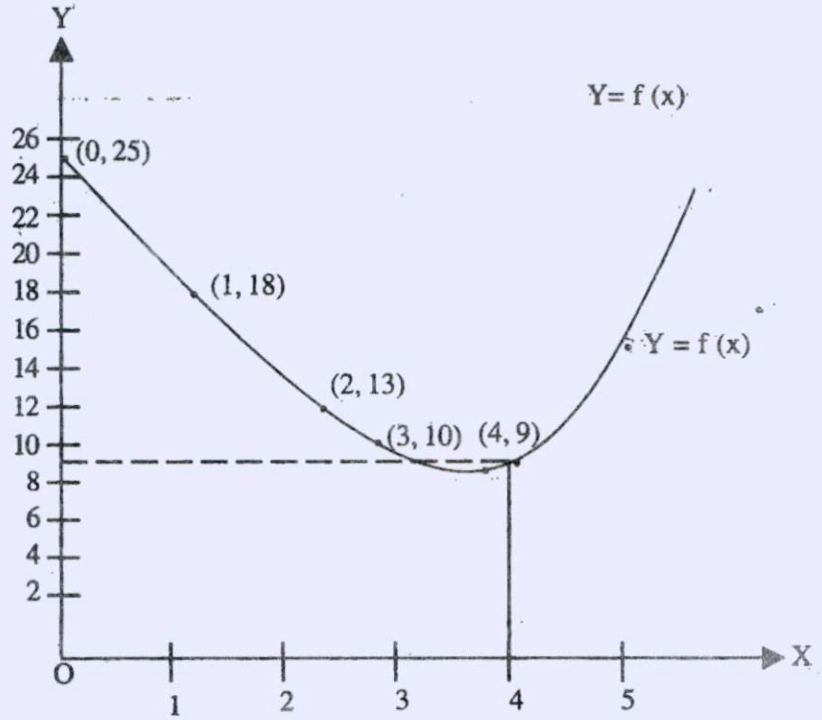
ಆದ್ದರಿಂದ, $x = 2$ ಆದಾಗ,

ಬಿಂಬಕ ಕನಿಷ್ಠಗೊಳ್ಳುತ್ತಿದೆ.

ಇದರ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ನೋಡೋಣ,

$$Y = 25 - 8x + x^2$$

X	Y
0	25
1	18
2	13
3	10
4	9
5	10



6.5 ಸಾರಾಂಶಿಸೋಣ

ಈ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ನೀವು ಒಂದು ವಕ್ರ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕದ ಕನಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಗರಿಷ್ಠ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸುವುದನ್ನು ಕಲಿತಿದ್ದೀರಿ. ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದ ಅಧ್ಯಯನದಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ಆರ್ಥಿಕ ಚಲಗಳ ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ತುಷ್ಟಿಗುಣ, ಲಾಭ, ಆದಾಯ ಇವುಗಳನ್ನು ಗರಿಷ್ಠಗೊಳಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ ನಿರುದ್ಯೋಗ, ನಷ್ಟ, ಬಡತನ, ವೆಚ್ಚಗಳನ್ನು ಕನಿಷ್ಠಗೊಳಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಪಾಠದಲ್ಲಿ

ನಾವು ನೋಡಿರುವಂತೆ, $y = f(x)$ ಬಿಂಬಕದ $\frac{dy}{dx}$ ಯಾವುದಾದರೂ xನ ಬೆಲೆಗೆ ಸೊನ್ನೆಯಾದರೆ, ಆ ಬಿಂಬಕ ಗರಿಷ್ಠ ಅಥವಾ ಕನಿಷ್ಠಗೊಳ್ಳುವುದು ಸಾಧ್ಯ. ಗರಿಷ್ಠ ಅಥವಾ ಕನಿಷ್ಠವನ್ನು ಗುರುತಿಸಲು $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ಅನ್ನು ಸಹ ಪರೀಕ್ಷಿಸಬೇಕು. xನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗೆ $\frac{dy}{dx}$, ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿತ್ತೋ, ಅದೇ ಬೆಲೆಗೆ $\frac{d^2 y}{dx^2} > 0$ ಆದರೆ, xನ ಆ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಬಿಂಬಕ ಕನಿಷ್ಠಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ xನ ಅದೇ ಬೆಲೆಗೆ $\frac{d^2 y}{dx^2} < 0$ ಆದರೆ, ಬಿಂಬಕ ಆ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಠಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.

ಮುಂದಿನ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನಾವು, ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಬಿಂಬಕಗಳ ಗರಿಷ್ಠತೆ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠತೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಅನ್ವಯಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡುತ್ತೇವೆ.

6.6. ಸ್ವಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

1. $Y = f(x)$ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಗರಿಷ್ಠ ಹಾಗೂ ಕನಿಷ್ಠಗೊಳಿಸಲು ಬೇಕಾದ ನಿಬಂಧನೆಗಳನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಿ.
2. $Y = 4x^2 - 2.x + 4$
   ಬಿಂಬಕ ಕನಿಷ್ಠಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆಯೇ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

6.7 ಮುಂದಿನ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ

ಡಾ. ಸಿ. ಕೆ. ರೇಣುಕಾರ್ಯ : ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಪರಿಮಾಣಾತ್ಮಕ ವಿಧಾನಗಳು

*****

ಪರಿವಿಡಿ :

7.1 ಪೀಠಿಕೆ

ಹಿಂದಿನ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನೀವು ಎರಡು ಚಲಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಒಂದು ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಗರಿಷ್ಠಗೊಳಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠಗೊಳಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಲಿತಿದ್ದೀರಿ. ಇದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಮೊದಲನೆಯ ಆರ್ಡರ್ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ಆರ್ಡರ್ ನಿಬಂಧನೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ. ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದ ಅಧ್ಯಯನದ ಅತಿ ಮುಖ್ಯ ಉದ್ದೇಶ, ಕೆಲವು ಆರ್ಥಿಕ ಚಲಗಳನ್ನು ಗರಿಷ್ಠಗೊಳಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಕೆಲವು ಆರ್ಥಿಕ ಚಲಗಳನ್ನು ಕನಿಷ್ಠಗೊಳಿಸುವುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಅನುಭೋಗಿ ತುಷ್ಟಿಗುಣವನ್ನು ಗರಿಷ್ಠಗೊಳಿಸಲು ಯತ್ನಿಸುತ್ತಾನೆ. ಹಾಗೆಯೇ ಉತ್ಪಾದಕ ತನ್ನ ಆದಾಯವನ್ನು ಮತ್ತು ಲಾಭವನ್ನು ಗರಿಷ್ಠಗೊಳಿಸಲು ಇಚ್ಛಿಸುತ್ತಾನೆ. ಹಾಗೆ ನೋಡುವುದಾದರೆ ಈ ಚಲಗಳು ಖಚಿತವಾಗಿ ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಗೊಳ್ಳುವುದು ಸಾಧ್ಯ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇವುಗಳನ್ನು ಗರಿಷ್ಠಗೊಳಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠಗೊಳಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯ ಮತ್ತು ಅರ್ಥಪೂರ್ಣ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಯಾವ-ಯಾವ ಚಲಗಳನ್ನು ಖಚಿತವಾಗಿ ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಗೊಳಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವೋ ಆ ಚಲಗಳನ್ನು ಗಣಿತೀಯ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಿ ಗರಿಷ್ಠಗೊಳಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠಗೊಳಿಸುವುದು ತುಂಬಾ ಉಪಯುಕ್ತ. ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನಾವು ಆದಾಯವನ್ನು ಗರಿಷ್ಠಗೊಳಿಸುವ ಮತ್ತು ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಕನಿಷ್ಠಗೊಳಿಸುವ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಕಲಿಯುತ್ತೇವೆ. ಇದೇ ಮಾದರಿಯಲ್ಲಿ ಇತರ ಚಲಗಳನ್ನು ಗರಿಷ್ಠ ಹಾಗೂ ಕನಿಷ್ಠಗೊಳಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯ.

7.2 ಕೆಳಗಿನ ಬೇಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ

$Y = 26 - 2x - 4x^2$

ಇಲ್ಲಿ Y ಬೇಡಿಕೆ ಪ್ರಮಾಣ ಮತ್ತು x ಬೆಲೆಯಾಗಿರಲಿ.

ಬೇಡಿಕೆ ರೇಖೆ ಮತ್ತು ಸರಾಸರಿ ಆದಾಯ ರೇಖೆಗಳೆರಡೂ ಪರ್ಯಾಯವಾದ ಪರಿಭಾವನೆಗಳು ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಬೆಲೆ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಉದ್ದಕ್ಕೂ ಪ್ರಮಾಣದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ನಮಗೆ ಒಟ್ಟು ಆದಾಯ ಬಿಂಬಕ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $y \, . \, x = 26x - 2x^2 - 4x^3$

y.x ಅನ್ನು ಒಟ್ಟು ಆದಾಯ R ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ನಮೂದಿಸೋಣ.

$R = 26x - 2x^2 - 4x^3$

ಈ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಗರಿಷ್ಠಗೊಳಿಸೋಣ

ಫಸ್ಟ್ ಆರ್ಡರ್ ಡಿರೈವೇಟಿವ್ $\dfrac{dR}{dx} = 26 - 4x - 12x^2$

ಇದು ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಮನಾಗಬೇಕು.

ಆದ್ದರಿಂದ,

$$26 - 4x - 12x^2 = 0$$

ಅಥವಾ $12x^2 + 4x - 26 = 0$

ಅಥವಾ $6x^2 + 2x - 13 = 0$

ಇದು ಕ್ವಾಡ್ರಾಟಿಕ್ ಸಮೀಕರಣ. ನಾವು ಈ ಹಿಂದೆಯೇ ನೋಡಿರುವಂತೆ ಇದಕ್ಕಾಗಿ, xನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಬೇಕು.

ಇಲ್ಲಿ $a = 2$, $b = 6$ ಮತ್ತು $c = -13$ ಆಗಿವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ,

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 6 \times -13}}{2 X 6}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4+312}}{12}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{316}}{12}$$

$$x = \frac{-2 \pm 17.66}{12}$$

$$x = \frac{-2 + 17.66}{12}$$

$$x = \frac{15.66}{12} = 1.31$$

ಆದ್ದರಿಂದ $x = 1.31$ ಆಗಿರುವಾಗ ಒಟ್ಟು ಆದಾಯ ಗರಿಷ್ಠಗೊಳ್ಳುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಇದನ್ನು ಖಚಿತಗೊಳಿಸಬೇಕಾದರೆ ಎರಡನೇ ಆರ್ಡರ್ ಡಿಫರೆನ್ಸಿಯೇಷ್ನ ಅನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಬೇಕು. ಅದು, $x = 1.31$ ಆಗಿರುವಾಗ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಬೇಕು. ಇದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ;

$$\frac{dR}{dx} = 26 - 4x - 12 . x^2$$

$$\frac{d^2R}{dx^2} = -4 - 24x$$

$x = 1.31$ ಆಗಿರುವಾಗ $\frac{d^2R}{dx^2} < 0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮಾರಾಟದ ಪ್ರಮಾಣ 1.31 ಆಗಿರುವಾಗ ಉತ್ಪಾದಕನಿಗೆ ಗರಿಷ್ಠ ಆದಾಯ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಅವನ ಗರಿಷ್ಠ ಆದಾಯವನ್ನು ನೋಡೋಣ :

$$R = 26x - 2x^2 - 4x^3$$

$x = 1.31$ ಆಗಿರುವಾಗ

$$R = 26\,(1.31) - 2\,(1.31)^2 - 4\,(1.31)^3$$

$$R = 34.06 - 3.43 - 8.99$$

$$\underline{R = 21.69}$$

7.3 ಒಟ್ಟು ಆದಾಯ ಮತ್ತು ಒಟ್ಟು ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿ ಲಾಭ

ಒಟ್ಟು ಆದಾಯ ಬಿಂಬಕ ಮತ್ತು ಒಟ್ಟು ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕಗಳು ಗೊತ್ತಿರುವಾಗ ಅವೆರಡರ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ ಲಾಭವನ್ನು ಗರಿಷ್ಠಗೊಳಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯ. ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

ಒಟ್ಟು ಆದಾಯ : $R = 28x - 5x^2$

ಒಟ್ಟು ವೆಚ್ಚ : $C = x^2 + 4x$

ಈಗ ಲಾಭವನ್ನು ಗರಿಷ್ಠಗೊಳಿಸೋಣ.

ಲಾಭ = ಒಟ್ಟು ಆದಾಯ - ಒಟ್ಟು ವೆಚ್ಚ

$$\pi = \{R - C\}$$

$$\pi = \{28x - 5x^2\} - \{x^2 + 4x\}$$

$$\pi = 28x - 4x - 5x^2 - x^2$$

$$\pi = 24x - 6x^2$$

ಇದನ್ನು ಗರಿಷ್ಠಗೊಳಿಸೋಣ

ಮೊದಲನೆಯ ನಿಬಂಧನೆಯ ಪ್ರಕಾರ, ಫಸ್ಟ್ ಆರ್ಡರ್ ಡಿರೈವೇಟಿವ್ ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಮನಾಗಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\pi = 24x - 6x^2$$

$$\frac{d\pi}{dx} = 24 - 12\,x = 0$$

ಅಥವಾ $-12x = -24$

$\underline{x = 2}$

$x = 2$ ಆಗಿರುವಾಗ ಲಾಭ ಗರಿಷ್ಠಗೊಳ್ಳುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಇದೆ.

ಇದನ್ನು ಖಚಿತಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕಾದರೆ, ಎರಡನೆಯ ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಬೇಕು. ಎರಡನೆಯ ಡಿಫರೆನ್ಷಿಯೇಷನ್ ನೋಡೋಣ ;

$$\frac{d\pi}{dx} = 24 - 12\,x$$

$$\frac{d^2\pi}{dx^2} = -12 \langle 0$$

ಆದ್ದರಿಂದ $x = 2$ ಆಗಿರುವಾಗ ಲಾಭ ಗರಿಷ್ಠಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಈ ಗರಿಷ್ಠ ಲಾಭ ಎಷ್ಟಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಲಾಭ ಬಿಂಬಕದಲ್ಲಿ x ಗೆ 2ನ್ನು ಹಾಕೋಣ.

$$\pi = 24\,x - 6\,x^2$$

$x = 2$, ಆದಾಗ, $\pi = 24 \times 2 - 6(2)^2$

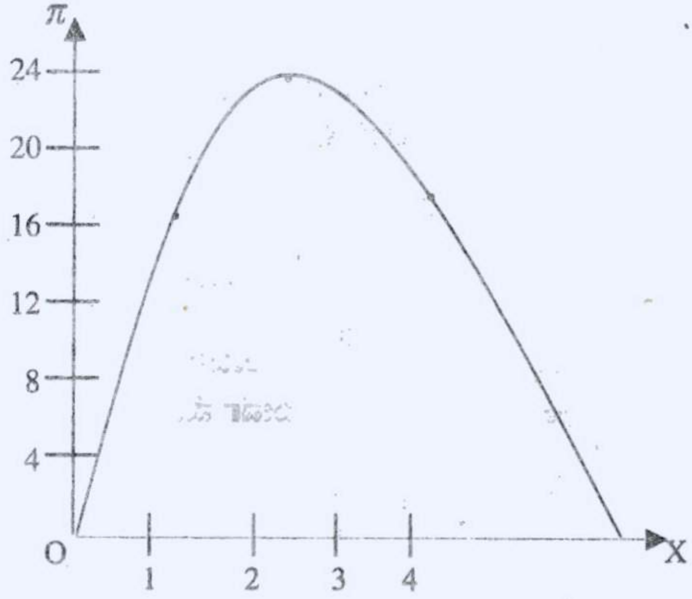
$$= 48 - 24$$

$$\pi = \mathbf{24}$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಉತ್ಪಾದಕ 2 ಘಟಕಗಳಷ್ಟು ಉತ್ಪಾದಿಸುತ್ತಾನೆ ಮತ್ತು 24 ಘಟಕಗಳಷ್ಟು ಲಾಭ ಪಡೆಯುತ್ತಾನೆ. ಕೆಳಗಿನ ನಕ್ಷೆ ಈ ಲಾಭದ ಗರಿಷ್ಠತೆಯನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತದೆ.

ಲಾಭ ಬಿಂಬಕ $\pi = 24x - 6x^2$

X	π
0	0
1	18
2	24
3	18



7.4 ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಒಟ್ಟು ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕ : ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕ ಮತ್ತು ಅದರ ಕನಿಷ್ಠತೆ

$Y_c = a + bx$ ಎಂಬ ಒಟ್ಟು ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ Yc - ಒಟ್ಟು ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕ X ಉತ್ಪಾದನೆಯ ಪ್ರಮಾಣ. ಇದರ ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕ,

$$\frac{Y_c}{x} = \overline{Y}_c = \overline{Y}_c = \frac{a}{x} + b$$

ಒಟ್ಟು ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕದ ಮೊದಲನೆಯ ಡಿಫರೆನ್ಷಿಯೇಷನ್ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಅದು ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ,

$Yc = a + bx$ ಒಟ್ಟು ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕವಾದರೆ,

$\frac{dY_c}{dx} = b$ ಎನ್ನುವುದು ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕ.

ಮೇಲಿನ ಒಟ್ಟು ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕ, ಸರಳ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕ. ಈಗ ವಕ್ರ ರೇಖೆ ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ನೋಡೋಣ;

$$Y_c = ax^2 + bx + c$$

ಎನ್ನುವುದು, ಒಟ್ಟು ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ :

ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕ $= \frac{Y_c}{x} = ax + b + \frac{c}{x}$

ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕ $= \frac{dY_c}{dx} = 2ax + b$

ಇದು ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕವಾಗಿದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು. ಈಗ ಮೇಲಿನ ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಕನಿಷ್ಠಗೊಳಿಸೋಣ ;

$$\overline{Y}_c = ax + b + \frac{c}{x}$$

ಮೊದಲನೆಯ ಡಿಫರೆನ್ಶಿಯೇಷನ್, $\frac{d\overline{y}_c}{dx} = a - \frac{c}{x^2}$

ಇದನ್ನು ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಮಗೊಳಿಸೋಣ ;

$$\frac{d\overline{y}_c}{dx} = a - \frac{c}{x^2} = 0$$

$$\text{ಅಥವಾ} \quad a = \frac{c}{x^2}$$

$$ax^2 = c$$

$$x^2 = c$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$$

$x = \sqrt{\frac{c}{a}}$ ಯಲ್ಲಿ ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚ ಕನಿಷ್ಠವಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯಿದೆ. ಇದನ್ನು ಖಚಿತಗೊಳಿಸಬೇಕಾದರೆ, ಎರಡನೇ ಡಿಫರೆನ್ಶಿಯೇಷನ್ ನೋಡಬೇಕು.

$$\frac{d\overline{y}_c}{dx} = a - \frac{c}{x^2}$$

$$\frac{d^2\overline{y}_c}{dx^2} = \frac{2c}{x^3}$$

$x = \sqrt{\frac{c}{a}}$ ಯಲ್ಲಿ $\frac{2c}{x^3} > 0$. ಆದ್ದರಿಂದ $x = \sqrt{\frac{c}{a}}$ ಯಲ್ಲಿ ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚ ಕನಿಷ್ಠಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. $x = \sqrt{\frac{c}{a}}$ ಆಗಿರುವಾಗ ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚ ಎಷ್ಟಿರುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ನೋಡೋಣ ;

$$\overline{Y}_c = ax + b + \frac{c}{x}$$

$$x = \sqrt{\frac{c}{a}} \text{ ಆದಾಗ, } \quad \overline{Y}_c = a\sqrt{\frac{c}{a}} + b + \frac{c}{\sqrt{\frac{c}{a}}}$$

$$\overline{Y}_c = \frac{\sqrt{a}\ x\ \sqrt{a}\ \sqrt{c}}{\sqrt{a}} + b + \sqrt{c}\ x\ \sqrt{c}\ x\ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}$$

$$\overline{Y}_c = b + 2\sqrt{ac} .$$

$\overline{Y}_c = b + 2\sqrt{ac}$ ಆಗಿರುವಾಗ, ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚ ಎಷ್ಟಿರುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ನೋಡೋಣ; ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚ $= \frac{d\overline{Y}_c}{dx} = 2a\ x + b$

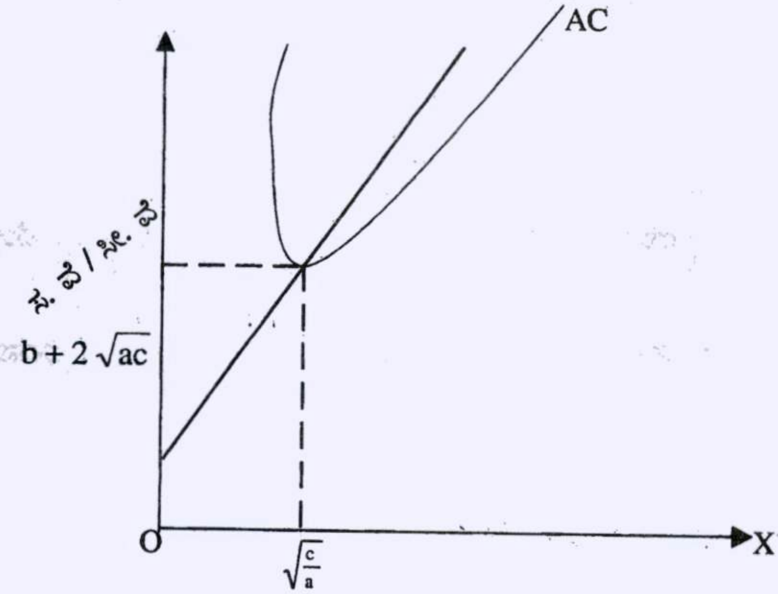
$$x = \sqrt{\frac{c}{a}} \text{ ಆಗಿರುವಾಗ, ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚ,}$$

$$= 2a\sqrt{\frac{c}{a}} + b$$

ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚ $== 2 . \sqrt{a} . \sqrt{a}\ x \sqrt{\frac{c}{a}} + b$

ಆದ್ದರಿಂದ, X $= b + 2\sqrt{ac}$ ಆಗಿರುವಾಗ,

ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚ = ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚ = $b + 2\sqrt{ac}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚ, ಕನಿಷ್ಠವಾಗಿರುವಾಗ ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚ ಮತ್ತು ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗಿನ ನಕ್ಷೆಯ ಮೂಲಕ ಇದನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು.



ಕೆಳಗಿನ ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಕನಿಷ್ಠಗೊಳಿಸೋಣ.

$$\overline{Y}_c = 2x + 5 + \frac{18}{x}$$

ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚ $\dfrac{d\,\overline{Y}c}{d\,x} = 2 - \dfrac{18}{x^2}$

ಕನಿಷ್ಠತೆಗೆ ಮೊದಲನೆಯ ನಿಬಂಧನೆ .

$$\frac{d\,\overline{Y}c}{d\,x} = 0$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $2 - \dfrac{18}{x^2} = 0$

$$\frac{18}{x^2} = 2$$

$$2x^2 = 18$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \sqrt{9} = 3$$

X = 3 ಆಗಿರುವಾಗ ವೆಚ್ಚ ಕನಿಷ್ಠಗೊಳ್ಳುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಇದೆ. ಆದರೆ ಇದನ್ನು ಖಚಿತಪಡಿಸಲು ಎರಡನೇ ಆರ್ಡರ್ ಡಿಫರೆನ್ಶಿಯೇಷನ್ ಪರೀಕ್ಷಿಸಬೇಕು.

$$\frac{d\,\overline{y}_c}{dx} = 2 - \frac{18}{x^2}$$

$$\frac{d^2\,\overline{y}_c}{dx^2} = \frac{36}{x^3}$$

$X = 3$ ಆದಾಗ, $\dfrac{36}{x^3} \rangle 0$ ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$X = 3$ ಆಗಿರುವಾಗ ವೆಚ್ಚ ಕನಿಷ್ಠಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.

X = 3 ಆಗಿರುವಾಗ, ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚ ಮತ್ತು ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚಗಳು ಎಷ್ಟಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ;

ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚ . $\overline{Y}_c = 2x + 5 + \dfrac{18}{x}$

$X = 3$ ಆಗಿರುವಾಗ, $\overline{Y}_c = 6+5+6=17$

$X = 3,$ ಆಗಿರುವಾಗ ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚ $\overline{Y}_c = 2x+5+\frac{18}{x}$

ಒಟ್ಟು ವೆಚ್ಚ $\overline{Y}_c = 2x^2+5x+18$

ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚ $\frac{dy_c}{dx} = 4x+5$

$x = 3$ ಆದಾಗ ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚ $= 4 \text{ x } 3 + 5 = 17$

ಆದ್ದರಿಂದ, $X = 3$ ಆಗಿರುವಾಗ,

ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚ = ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚ = 17

ಉದಾಹರಣೆ :

ಕೆಳಗಿನ ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕಕ್ಕೆ, ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚ ಯಾವಾಗ ಕನಿಷ್ಮವಾಗುತ್ತದೆ ಪರೀಕ್ಷಿಸೋಣ. ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚ ಕನಿಷ್ಮವಾಗಿರುವಾಗ ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚ ಎಷ್ಟಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಹ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕ = $\overline{Y}_c = 10 - 4x^3 + 3x^4$

ಕನಿಷ್ಮತೆಗೆ ಮೊದಲನೆಯ ನಿಬಂಧನೆ ತೃಪ್ತಿಯಾಗಬೇಕಾದರೆ,

$$\frac{d\overline{Y}c}{dx} = 0$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\overline{Y}_c = 10 - 4x^3 + 3x^4$ ಆದರೆ,

$$\frac{d\overline{y}_c}{dx} = -12x^2 + 12x^3 = 0$$

$$-12x^2(1-x) = 0$$

ಆದ್ದರಿಂದ $x = 1$ ಆಗಿರುವಾಗ $\frac{d\overline{y}_c}{dx} = 0$ ಗೆ ಸಮನಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $x = 1$ ಆಗಿರುವಾಗ ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚ ಕನಿಷ್ಮವಾಗಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಇದೆ. ಇದು ಖಚಿತವಾಗಬೇಕಾದರೆ ಎರಡನೆಯ ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಬೇಕು.

ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{d^2\overline{y}c}{dx^2} = -24x + 36x^2$

$x = 1$ ಆಗಿರುವಾಗ $\frac{d^2\overline{y}_c}{dx^2} = 12 > 0$

$\frac{d^2\overline{y}_c}{dx^2}$ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವುದರಿಂದ x = 1ರಲ್ಲಿ ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚ ಕನಿಷ್ಠವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

x = 1 ಆಗಿರುವಾಗ ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕ . $\overline{Y}_c = 10 - 4x^3 + 3x^4$

ಒಟ್ಟು ವೆಚ್ಚ $Y_c = 10x - 4x^4 + 3x^5$

ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚ $\frac{dy_c}{dx} = 10 - 16x^3 + 15x^4$

ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚ = 9

x = 1 ಆಗಿರುವಾಗ ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚ $\overline{Y}_c = 10 - 4 + 3 = 9$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\pi = 9$ ಆದಾಗ, ಸ.ವೆ = ಸೀ.ವೆ

7.6 ನಿಮ್ಮ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ

1. ಬೇಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕ $P = (x-6)^2$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕ $Q = \frac{39}{4}x - x^2$ ಆಗಿರುವಾಗ ಉತ್ಪಾದಕನ ಲಾಭವನ್ನು ಗರಿಷ್ಠಗೊಳಿಸಿ.
2. $P = \sqrt{16 - x}$ ಆಗಿರುವಾಗ, ಮತ್ತು $x = 7$ ಆಗಿರುವಾಗ ಲಾಭವನ್ನು ಗರಿಷ್ಠಗೊಳಿಸಿ.

7.7 ಸಾರಾಂಶಿಸೋಣ

ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನೀವು ಬೇಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕ ಗೊತ್ತಿರುವಾಗ, ಒಟ್ಟು ಆದಾಯವನ್ನು ಗರಿಷ್ಠಗೊಳಿಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಪರಿಚಯ ಮಾಡಿಕೊಂಡಿದ್ದೀರಿ. ಹಾಗೆಯೇ, ಒಟ್ಟು ವೆಚ್ಚ, ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚ ಮತ್ತು ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕಗಳ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿದ್ದೀರಿ. ಜೊತೆಗೆ, ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕ ಗೊತ್ತಿರುವಾಗ, ಅದನ್ನು ಕನಿಷ್ಠಗೊಳಿಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕಲಿತುಕೊಂಡಿದ್ದೀರಿ. $Y_c = ax^2 + bx + c$ ಎನ್ನುವುದು ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕವಾಗಿರುವಾಗ, ಅದರಿಂದ ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಪಡೆದು, ಅದನ್ನು ಕನಿಷ್ಠಗೊಳಿಸುವುದು ಹೇಗೆ? ಮತ್ತು ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚ ಕನಿಷ್ಠವಾದಾಗ ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚ ಮತ್ತು ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚಗಳು ಹೇಗೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿದ್ದೀರಿ. ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನೀವು ಪರಿಚಯಿಸಿಕೊಂಡಿರುವುದು ಎರಡು ಚಲಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಬಿಂಬಕಗಳು ಎನ್ನುವುದು ಗಮನಾರ್ಹ. ಚಲಗಳು ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವಾಗ ಬಿಂಬಕಗಳ ಡಿಫರೆನ್ಷಿಯೇಷನ್ ಹೇಗೆ ಮಾಡಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ಮುಂದಿನ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುತ್ತೀರಿ.

7.8 ಸ್ವಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

1. $Y_c = ax^2 + bx + c$ ಎಂಬ ಒಟ್ಟು ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. ಈ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಬಳಸಿ ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಕನಿಷ್ಠಗೊಳಿಸಿ. ಕನಿಷ್ಠ ವೆಚ್ಚದಲ್ಲಿ, ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. $Y = -3x^2 + x + 8$

   ಎಂಬ ಬೇಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಇದನ್ನು ಬಳಸಿ ಒಟ್ಟು ಆದಾಯವನ್ನು ಗರಿಷ್ಠಗೊಳಿಸಿ.

7.9 ಮುಂದಿನ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ

ಡಾ. ಸಿ. ಕೆ. ರೇಣುಕಾರ್ಯ : ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಪರಿಮಾಣಾತ್ಮಕ ವಿಧಾನಗಳು

*****

ಘಟಕ - 8 : ಅನೇಕ ಚಲಗಳ ಬಿಂಬಕಗಳು

ಪರಿವಿಡಿ :

8.1 ಪೀಠಿಕೆ

ಇದುವರೆಗೆ ನಾವು $Y = f(x)$ ಬಿಂಬಕದ ಡಿಫರೆನ್ಸಿಯೇಷನ್‌ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ನೋಡಿದೆವು. ಈ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಆಧಾರಿಸಿ, ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ವರಮಾನವನ್ನು ಗರಿಷ್ಠಗೊಳಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಹೇಗೆ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಕನಿಷ್ಠಗೊಳಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಲಾಭವನ್ನು ಹೇಗೆ ಗರಿಷ್ಠಗೊಳಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದೆವು. $Y = f(x)$ ಎನ್ನುವುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಎರಡು ಚಲಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಬಿಂಬಕ ಸಂಬಂಧ. ಆದರೆ ಆರ್ಥಿಕ ಚಲಗಳ ಸಂಬಂಧಗಳು ಕೇವಲ ಎರಡು ಚಲಗಳಿಗೆ ಸೀಮಿತವಾದುದಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಯಾವುದೇ ಸರಕಿನ ಬೇಡಿಕೆಯ ಪ್ರಮಾಣ, ಅದರ ಬೆಲೆಯೊಡನೆಯಷ್ಟೇ ಅಲ್ಲದೆ, ಅನುಭೋಗಿಯ ಆದಾಯ, ಆತನ ಆಸ್ತಿ, ಆತನ ಒಲವುಗಳು ಇತ್ಯಾದಿಗಳ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿತವಾಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ ಒಂದು ಸರಕಿನ ಉತ್ಪಾದನೆ, ಶ್ರಮ, ಸಂಘಟನೆ ಮುಂತಾದ ಚಲಗಳ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿತವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಯಾವುದೇ ಆರ್ಥಿಕ ಕ್ರಿಯೆ ಅನೇಕ ಚಲಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ. ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಬಿಂಬಕಗಳ ಮೂಲಕ ಪರಿಶೀಲಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಒಂದು ಬೇಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ ;

$$Y = f(p, t, i)$$

ಇಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು ಚಲಗಳಿವೆ. 3ಸ್ವತಂತ್ರ ಚಲಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಅವಲಂಬಿ ಚಲ. Y ಅವಲಂಬಿ ಚಲವಾದರೆ, p, t, i ಸ್ವತಂತ್ರ ಚಲಗಳು. y, ಬೇಡಿಕೆ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿದರೆ, p, t ಮತ್ತು i ಕ್ರಮವಾಗಿ ಸರಕಿನ ಬೆಲೆ, ಅನುಭೋಗಿಯ ಅಭಿರುಚಿ ಮತ್ತು ಅನುಭೋಗಿಯ ಆದಾಯವನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತವೆ. ಮತ್ತೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸುವುದಾದರೆ,

$$Q = A K^{\alpha} L^{\beta}$$

ಇದು ಒಂದು ಉತ್ಪಾದನ ಬಿಂಬಕ. ಈ ಬಿಂಬಕ ಕಾಬ್-ಡಗ್ಲಾಸ್‌ರವರ ಉತ್ಪಾದನ ಬಿಂಬಕವೆಂದು ಪ್ರಸಿದ್ಧವಾಗಿದೆ. ಇದರ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಮುಂದಿನ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಈ ಬಿಂಬಕದಲ್ಲಿ Q, ಉತ್ಪಾದನ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು, K ಮತ್ತು L, ಕ್ರಮವಾಗಿ ಬಂಡವಾಳ ಮತ್ತು ಶ್ರಮವನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತವೆ. A ಸ್ಥಿರಾಂಕವಾಗಿದ್ದರೆ, α, β ಚಲ-ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳಾಗಿವೆ. ಈ ಬಿಂಬಕ, ಒಟ್ಟು ಉತ್ಪಾದನೆ, ಶ್ರಮ ಮತ್ತು ಬಂಡವಾಳದ ಮೇಲೆ ಹೇಗೆ ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ವಿವರಿಸುತ್ತದೆ. ಬಂಡವಾಳ ಮತ್ತು ಶ್ರಮ ಘಟಕಗಳು, ಬದಲಾದಾಗ ಉತ್ಪಾದನೆ ಹೇಗೆ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಪಾರ್ಶ್ವ ಅವಕಲನ (ಪಾರ್ಷಿಯಲ್ ಡಿಫರೆನ್ಸಿಯೇಷನ್) ಕ್ರಮದ ಮೂಲಕ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕಲಿಯೋಣ ;

8.2 ಪಾರ್ಶಿಯಲ್ ಡಿಫರೆನ್ಸಿಯೇಷನ್ ವಿಧಾನ

$$O = 4L^2 + 5LK + K^2$$

ಎಂಬ ಉತ್ಪಾದನ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ O - ಒಟ್ಟು ಉತ್ಪಾದನೆಯನ್ನು, K ಮತ್ತು L ಕ್ರಮವಾಗಿ ಬಂಡವಾಳ ಮತ್ತು ಶ್ರಮವನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತವೆ.

ಈ ಬಿಂಬಕದ ಪ್ರಕಾರ ಶ್ರಮ ಮತ್ತು ಬಂಡವಾಳಗಳು ಬದಲಾದಂತೆ ಉತ್ಪಾದನೆಯೂ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ. ಶ್ರಮ ಒಂದು ಘಟಕದಷ್ಟು ಬದಲಾದಾಗ, ಉತ್ಪಾದನೆ ಎಷ್ಟು ಪ್ರಮಾಣದಷ್ಟು ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ ? ಹಾಗೆಯೇ ಒಂದು ಘಟಕದಷ್ಟು ಬಂಡವಾಳ ಬದಲಾದಾಗ, ಎಷ್ಟು ಪ್ರಮಾಣದಷ್ಟು ಉತ್ಪಾದನೆ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ತಿಳಿಯಬೇಕಾದರೆ, ಪಾರ್ಷಿಯಲ್ ಡಿಫರೆನ್ಸಿಯೇಷನ್ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಬೇಕು. ಈ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸ್ವತಂತ್ರ ಚಲವನ್ನು ಆಯ್ದುಕೊಂಡು, ಉಳಿದ ಸ್ವತಂತ್ರ ಚಲಗಳು ಸ್ಥಿರವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂಬ ಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಮಾಡಿಕೊಂಡು, ಡಿಫರೆನ್ಸಿಯೇಷನ್ ಮಾಡಲಾಗುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಉದಾಹರಣೆ - 1 : $Y = X^2 + 2xz + z^2$

ಮೊದಲು ಅವಲಂಬಿ ಚಲ Y ಅನ್ನು X ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಡಿಫರೆನ್ಸಿಯೇಟ್ ಮಾಡೋಣ. ಹೀಗೆ ಮಾಡುವಾಗ ಚಲ Y ಅನ್ನು ಸ್ಥಿರಾಂಕವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕು.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2x + 2z$$

ನಂತರ Y ಅನ್ನು Z ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಢಿಫರೆನ್ಸಿಯೇಟ್ ಮಾಡೋಣ. ಹೀಗೆ ಮಾಡುವಾಗ ಚಲ x ಅನ್ನು ಸ್ಥಿರಾಂಕವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕು. ಆಗ

$$\frac{\partial y}{\partial z} = 2x + 2z$$

ಉದಾಹರಣೆ - 2 :

$$Q_d = 100 - 3P^3 + 2y$$

$$\frac{\delta Q_d}{\delta p} = -9p2$$

$$\frac{\delta Q_d}{\delta y} = 2$$

8.3 ಸೀಮಾಂತ ಬೇಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕಗಳು

ಮೊದಲನೇ ಆರ್ಡರ್ ಡಿಫರೆನ್ಸಿಯೇಷನ್ ಮಾಡಿದಾಗ ಅದು ಸೀಮಾಂತ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಈ ಹಿಂದೆಯೇ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಂದು ಬೇಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕ, ಅನೇಕ ಸ್ವತಂತ್ರ ಚಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಅವಲಂಬಿ ಚಲವನ್ನು, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸ್ವತಂತ್ರ ಚಲಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಡಿಫರೆನ್ಸಿಯೇಷನ್ ಮಾಡಿದಾಗ ಅದು ಆ ಚಲಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಸೀಮಾಂತ ಬೇಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಬೇಡಿಕೆ

ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

$$X = 10 - P - {}^{1}\!/_{2}\, q$$
$$Y = 9 - 2P - q$$

ಇಲ್ಲಿ X, Y ಎರಡು ಸರಕುಗಳ ಬೇಡಿಕೆ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಮತ್ತು P, q ಕ್ರಮವಾಗಿ X ಮತ್ತು Y ಸರಕುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಈಗ ಈ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಡಿಫರೆನ್ಸಿಯೇಟ್ ಮಾಡಿದರೆ, ಮೊದಲನೇ ಆರ್ಡರ್ ಡಿಫರೆನ್ಸಿಯೇಷನ್ ಸೀಮಾಂತ ಬೇಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಕೊಡುತ್ತವೆ. ಮೇಲಿನ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಡಿಫರೆನ್ಸಿಯೇಟ್ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ.

$$\frac{\delta x}{\delta p} = -1$$

$$\frac{\delta x}{\partial q} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\delta y}{\delta p} = -2$$

$$\frac{\delta y}{\delta q} = -1$$

ಮೇಲಿನ ಬಿಂಬಕಗಳು ಸೀಮಾಂತ ಬೇಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕಗಳು.

ಉದಾಹರಣೆ : ಕೆಳಗಿನ ಬೇಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕಗಳಿಗೆ ಸೀಮಾಂತ ಬೇಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

$$X = 5 - 2P + q$$

$$Y = 10 + 2P - 2q$$

$$\frac{\delta x}{\partial P} = -2$$

$$\frac{\delta x}{\delta q} = 1$$

$$\frac{\delta y}{\delta p} = +2$$

$$\frac{\delta y}{\delta q} = -2$$

8.4 ಸರಕುಗಳ ಸಂಬಂಧಗಳು

ಎರಡು ಮತ್ತು ಹೆಚ್ಚಿನ ಬೇಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುವಾಗ, ಈ ಸರಕುಗಳ ನಡುವಣ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸಹ ಗುರುತಿಸಬಹುದು. ಎರಡು ಸರಕುಗಳು ಸ್ಪರ್ಧಾತ್ಮಕವಾಗಿರಬಹುದು. ಪೂರಕವಾಗಿರಬಹುದು ಅಥವಾ ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿರಬಹುದು. ಸೀಮಾಂತ ಬೇಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಈ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಗುರುತಿಸಬಹುದು. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಕೆಳಗಿನ ನಿಯಮವನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕು.

$$X = f(p, q)$$

$$Y = g(p,q)$$

ಆಗಿರುವಾಗ,

$\frac{\delta x}{\delta q}$ ಮತ್ತು $\frac{\delta y}{\delta p}$ ಎರಡೂ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿದ್ದರೆ.

X ಮತ್ತು Y ಸರಕುಗಳು ಸ್ಪರ್ಧಾತ್ಮಕ ಸರಕುಗಳು.

$\frac{\delta x}{\delta q}$ ಮತ್ತು $\frac{\delta y}{\delta p}$ ಎರಡೂ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿದ್ದರೆ,

X ಮತ್ತು Y ಸರಕುಗಳು ಪೂರಕ ಸರಕುಗಳು

ಮತ್ತು $\frac{\delta x}{\delta q}$ ಮತ್ತು $\frac{\delta y}{\delta p}$ ಎರಡೂ ವಿರುದ್ಧ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ X ಮತ್ತು Y ಸರಕುಗಳು, ಸ್ವತಂತ್ರ ಸರಕುಗಳು.

ಉದಾಹರಣೆ :

$$X = 3 + 5P + 8q \qquad Y = 10 + 3P + 4q$$

ಎಂಬ ಎರಡು ಬೇಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಇಲ್ಲಿ X ಮತ್ತು Y ಸರಕುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಅರಿಯೋಣ.

ಮೊದಲನೆಯ ಆರ್ಡರ್ ಡಿಫರೆನ್ಸಿಯೇಷನ್ ಮೂಲಕ ಸೀಮಾಂತ ಬೇಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$\frac{\delta x}{\delta q}$ ಮತ್ತು $\frac{\delta y}{\delta p}$ ಗಳ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ ;

$$\frac{\delta x}{\delta p} = +5 \qquad \frac{\delta y}{\delta p} = 3$$

$$\frac{\delta x}{\delta q} = 8 \qquad \frac{\delta y}{\delta q} = 4$$

$\frac{\delta x}{\delta q}$ ಮತ್ತು $\frac{\delta y}{\delta p}$ ಗಳೆರಡೂ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಇವೆರಡೂ ಸರಕುಗಳು ಸ್ಪರ್ಧಾತ್ಮಕ ಸರಕುಗಳು.

ಉದಾಹರಣೆ :

$$X = 15 - 2P + q$$
$$Y = 10 + 2P - 2q$$

ಎಂಬ ಬೇಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. X ಮತ್ತು Y ಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ.

$$\frac{\partial x}{\partial p} = -2 \qquad \frac{\delta y}{\delta p} = 2$$

$$\frac{\partial x}{\partial q} = 1 \qquad \frac{\delta y}{\delta q} = -2$$

$\frac{\delta x}{\delta q}$ ಮತ್ತು $\frac{\delta y}{\delta p}$ ಗಳೆರಡೂ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಈ ಸರಕುಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸ್ಪರ್ಧಾತ್ಮಕ ಸರಕುಗಳು.

8.5 ನಿಮ್ಮ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ

ಕೆಳಗಿನ ಬೇಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕಗಳಿಗೆ ಸೀಮಾಂತ ಬೇಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ. X ಮತ್ತು Y ಸರಕುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ.

$$X = 10 - 20P + 5q$$

$$Y = 15 + 1o P - 8q$$

8.6 ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕಗಳು

X ಮತ್ತು Y ಎರಡು ಸರಕುಗಳನ್ನು ಉತ್ಪಾದಿಸುವ ಜಂಟಿ ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕ. $C = C(x, y)$ ಆಗಿದ್ದರೆ,

$\frac{\delta c}{\delta x}$, X ಸರಕಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಹಾಗೆಯೇ, $\frac{\partial c}{\partial y}$, Y ಸರಕಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ :

$$C = 20 + 3x^2 + xy + 10y^2$$

ಎಂಬ ಜಂಟಿ ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. $X = 1$, $Y = 1$ ಆಗಿರುವಾಗ ಈ ಸರಕುಗಳ ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ :

$$\frac{\delta c}{\delta x} = 6x + y$$

$$\frac{\delta c}{\delta y} = x + 20y$$

$X = 1$, $Y = 1$ ಆಗಿರುವಾಗ,

X ನ ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚ $= \frac{\delta c}{\delta x} = 6 + 1 = 7$

Y ನ ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚ $= \frac{\delta c}{\delta y} = 1 + 20 = 21$

ಉದಾಹರಣೆ :

ಕೆಳಗಿನ ಜಂಟಿ ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕಕ್ಕೆ ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ನಮೂದಿಸಿರುವ X ಮತ್ತು Y ಅಂಶಗಳಲ್ಲಿ ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚಗಳನ್ನು ಮೌಲ್ಯೀಕರಿಸಿ.

$C = x^2 y^2 - 4xy + 8y + 9,$

$x = 2,$

$Y = 2$

$$\frac{\delta c}{\delta x} = 2xy^2 - 4x$$

$$\frac{\partial c}{\partial y} = 2yx^2 - 4x + 8$$

$x = 2, y = 2$ ಆಗಿರುವಾಗ,

x ನ ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚ $= 16 - 8 = 8$

y ನ ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚ $= 16 - 0 = 16$

8.7 ಸಾರಾಂಶಿಸೋಣ

ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನೀವು ಅನೇಕ ಚಲಗಳ ಬಿಂಬಕಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ, ಡಿಫರೆನ್ಸಿಯೇಷನ್ ಹೇಗೆ ಮಾಡಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿದ್ದೀರಿ. $Y = f(XZ)$ ಎಂಬ ಬಿಂಬಕವನ್ನು x ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಡಿಫರೆನ್ಸಿಯೇಟ್ ಮಾಡುವಾಗ, ಉಳಿದೆಲ್ಲ ಚಲಗಳನ್ನೂ ಸ್ಥಿರವೆಂದು ಭಾವಿಸಿ ಕೇವಲ x ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಡಿಫರೆನ್ಸಿಯೇಟ್ ಮಾಡಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ. ಎರಡೇ ಚಲಗಳಿದ್ದಾಗ ಮೊದಲನೇ ಡಿಫರೆನ್ಸಿಯೇಷನ್ ಅನ್ನು $Y = f(x)$ ಎಂಬ ಬಿಂಬಕಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ${}^{dy}/_{dx}$ ಎಂದು ನಮೂದಿಸಿದರೆ, ಹೆಚ್ಚು ಚಲಗಳಿರುವಾಗ ಅದನ್ನು ${}^{\delta y}/_{\delta x}$ ಎಂದು ನಮೂದಿಸಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ಸಹ ನೋಡಿದ್ದೀರಿ. ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದ ಅನ್ವಯಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ, ಸೀಮಾಂತ ಬೇಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು ಹೇಗೆ, ಸೀಮಾಂತ ಬೇಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕಗಳ ಚಿಹ್ನೆಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ, ಸರಕುಗಳ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ಗುರುತಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಹ ಕಲಿತಿದ್ದೀರಿ. ಹಾಗೆಯೇ, ಜಂಟಿ ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ ಅದರ ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು ಹೇಗೆ ? ಕೊಡಲಾಗಿರುವ ಬೆಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಸೀಮಾರತ ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು

ಮೌಲ್ಯೀಕರಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಹ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ್ದೀರಿ. ಮುಂದಿನ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ಪಾರ್ಷಿಯಲ್ ಡಿಫರೆನ್ಸಿಯೇಷನ್ ಅನ್ನು ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದ ಇತರ ಪರಿಭಾವನೆಗಳಿಗೆ ಹೇಗೆ ಅನ್ವಯಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುತ್ತೀರಿ.

8.8 ಸ್ವ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

1. ಕೆಳಗಿನ ಬೇಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕಗಳಿಗೆ ಸೀಮಾಂತ ಬೇಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ. ಇದರ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ X ಮತ್ತು Y ಸರಕುಗಳ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ.

(i) $x = 4/P^2q$

$y = 16/pq^2$

(ii) $X = 10 - 4P + 5q$

$Y = 16 + 5P - 6q$

(iii) $X = 4/pq$, $Y = 16/pq$

2. ಕೆಳಗಿನ ಜಂಟಿ ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕಕ್ಕೆ ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ. ನಮೂದಿಸಲಾಗಿರುವ X ಮತ್ತು Y ಮೌಲ್ಯಕ್ಕೆ ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿ.

(i) $C = X^3Y^2 - 2x^2y^2 + xy + 9, X = 2, Y = 1$

$C = x^2y^2 - 4xy + 8y + 9, X = 1, Y = 1.$

8.9 ಮುಂದಿನ ಓದಿಗಾಗಿ

ಪಿ. ಕೆ. ರೇಣುಕಾರ್ಯ : Quantitaive Methods for Economists. ಅಧ್ಯಾಯ - 7

*****

ಘಟಕ - 9 : ಹಲವು ಚಲಗಳ ಡಿಫರೆನ್ಷಿಯೇಷನ್ - ಅನ್ವಯಗಳು

ಪರಿವಿಡಿ :

9.1 ಪೀಠಿಕೆ

9.2 ಭಾಗಶಃ ಡಿಫರೆನ್ಷಿಯೇಷನ್‌ನ ಆರ್ಥಿಕ ಅನ್ವಯಗಳು

9.3 ಉತ್ಪಾದನ ಬಿಂಬಕಗಳು

9.4 ಹೋಮೋಜಿನಸ್ ಉತ್ಪಾದನ ಬಿಂಬಕ

9.5 ನಿಮ್ಮ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ

9.6 ಕಾಬ್-ಡಗ್ಲಾಸ್ ಉತ್ಪಾದನ ಬಿಂಬಕ

9.7 ಕಾಬ್-ಡಗ್ಲಾಸ್ ಉತ್ಪಾದನ ಬಿಂಬಕದ ಲಕ್ಷಣಗಳು

9.8 ಪ್ರತಿಫಲ ದರಗಳು

9.9 ಸ್ವ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

9.10 ಮುಂದಿನ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ

9.1 ಪೀಠಿಕೆ

ಹಿಂದಿನ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನಾವು ಅನೇಕ ಚಲಗಳಿರುವ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಡಿಫರೆನ್ಷಿಯೇಷನ್ ಮಾಡುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದೆವು. ಬೇಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕಗಳು ಅನೇಕ ಸ್ವತಂತ್ರ ಚಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವಾಗ, ಅವುಗಳ ಸೀಮಾಂತ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಸರಕುಗಳ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ಗುರುತಿಸುವುದನ್ನು ಕಲಿತೆವು. ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ಭಾಗಶಃ ಡಿಫರೆನ್ಷಿಯೇಷನ ಮುಂದಿನ ಕೆಲವು ಅನ್ವಯಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಭಾಗಶಃ ಡಿಫರೆನ್ಷಿಯೇಷನ್ ಮೂಲಕ, ಉತ್ಪಾದನ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಡಿಫರೆನ್ಷಿಯೇಟ್ ಮಾಡುವುದು ಹೇಗೆ ? ಒಂದು ಬಿಂಬಕದ ಡಿಗ್ರಿಯನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ? ಉತ್ಪಾದನ ಬಿಂಬಕ ತಿಳಿದಿರುವಾಗ ಉದ್ಯಮ, ಏರಿಕೆ, ಇಳಿಮುಖ ಅಥವಾ ಸ್ಥಿರ ಪ್ರತಿಫಲದಲ್ಲಿದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಜೊತೆಗೆ ಅತ್ಯಂತ ಪ್ರಚಾರ ಪಡೆದಿರುವ ಕಾಬ್-ಡಗ್ಲಾಸ್ ಉತ್ಪನ್ನ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇವೆಲ್ಲದರ ಉಪಯೋಗ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ತುಂಬಾ ವ್ಯಾಪಕವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಈ ಯೂನಿಟ್‌ಅನ್ನು ಎಚ್ಚರಿಕೆಯಿಂದ ಓದಿ ಮನನ ಮಾಡಬೇಕಾದುದು ಅಗತ್ಯ.

9.2 ಭಾಗಶಃ ಡಿಫರೆನ್ಷಿಯೇಷನ್‌ನ ಆರ್ಥಿಕ ಅನ್ವಯಗಳು

ಒಂದು ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ ಅದರ ಭಾಗಶಃ ಡಿಫರೆನ್ಷಿಯೇಷನ್‌ಗಳು, ಆಯ್ದುಕೊಳ್ಳಲಾಗುವ ಸ್ವತಂತ್ರ ಬಿಂಬಕಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಸೀಮಾಂತ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ಗ್ರಹಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಸೀಮಾಂತ ತುಷ್ಟಿಗುಣ, ಸೀಮಾಂತ ಉತ್ಪಾದನೆ, ಸೀಮಾಂತ ಬೇಡಿಕೆ, ಸೀಮಾಂತ ಆದಾಯ, ಸೀಮಾಂತ ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕಗಳು ತುಂಬಾ ಉಪಯುಕ್ತ ಎನ್ನುವುದು ನಮಗೆ ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಅನೇಕ ಚಲಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡಿರುವ ಒಟ್ಟು ಉತ್ಪಾದನೆ, ಒಟ್ಟು ಆದಾಯ, ಒಟ್ಟು ತುಷ್ಟಿಗುಣ, ಒಟ್ಟು ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ, ಆಯ್ದುಕೊಳ್ಳಲಾಗುವ ಸ್ವತಂತ್ರ ಚಲಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಭಾಗಶಃ ಡಿಫರೆನ್ಷಿಯೇಷನ್, ಸೀಮಾಂತ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಒಟ್ಟು ತುಷ್ಟಿಗುಣ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

$$U = q_1^2 q_2 + 3q_1 q_2^2$$

ಇಲ್ಲಿ U = ಒಟ್ಟು ತುಷ್ಟಿಗುಣ

q_1 = ಮೊದಲನೇ ಸರಕು

q_2 = ಎರಡನೇ ಸರಕು

ಎರಡು ಸರಕುಗಳ ಅನುಭೋಗದಿಂದ, ಒಬ್ಬ ಅನುಭೋಗಿಗೆ ದೊರೆಯುತ್ತಿರುವ ಒಟ್ಟು ತುಷ್ಟಿಗುಣವನ್ನು ಈ ಬಿಂಬಕ ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಸರಕಿನ ಅನುಭೋಗವನ್ನು ಸ್ಥಿರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಮತ್ತೊಂದು ಸರಕಿನ ಅನುಭೋಗವನ್ನು ವ್ಯತ್ಯಾಸಗೊಳಿಸಿದಾಗ, ಒಟ್ಟು ತುಷ್ಟಿಗುಣದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಭಾಗಶಃ ಡಿಫರೆನ್ಷಿಯೇಷನ್ ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ. ಅದನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಮಾಡಬಹುದು.

$$U = q_1^2 q_2 + 3 q_1 q_2^2$$

q_1 ನ ಸೀಮಾಂತ ತುಷ್ಟಿಗುಣ = $\frac{\partial u}{\partial q_1} = 2 q_1 q_2 + 3 q_2^2$

q_2 ನ ಸೀಮಾಂತ ತುಷ್ಟಿಗುಣ = $\frac{\partial u}{\partial q_2} = q_1^2 + 6 q_2 q_1$

ಈಗ ಅನುಭೋಗಿಯು $q_1=2$, $q_2=2$ ಘಟಕಗಳಷ್ಟು ಅನುಭೋಗವನ್ನು ನಡೆಸುತ್ತಿದ್ದರೆ. q_1 ನ ಸೀಮಾಂತ ತುಷ್ಟಿಗುಣ

$\frac{\partial u}{\partial q_1} = 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 + 3 \cdot (2)^2 = 8 + 12 = 20$ ಅಂಶಗಳು

ಮತ್ತು q_2ನ ಸೀಮಾಂತ ತುಷ್ಟಿಗುಣ

$\frac{\partial u}{\partial q_2} = (2)^2 + 6(2)(2) = 4 + 24 = 28$ ಅಂಶಗಳು ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಡಿಫರೆನ್ಶಿಯೇಷನ್ ಮೂಲಕ ಸೀಮಾಂತ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳುವುದು ಮತ್ತು ಸ್ವತಂತ್ರ ಚಲದ ವಿವಿಧ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ, ಅವುಗಳನ್ನು ಮೌಲ್ಯೀಕರಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು.

9.3 ಉತ್ಪಾದನ ಬಿಂಬಕಗಳು

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಯಾವುದೇ ಸರಕಿನ ಉತ್ಪಾದನೆಗೆ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಆದಾನಗಳು ಬೇಕು. ಶ್ರಮ, ಬಂಡವಾಳ, ಭೂಮಿ ಮತ್ತು ಸಂಘಟನೆಗಳ ಸಂಯೋಜನೆಯಿಂದ ಸರಕುಗಳನ್ನು ಉತ್ಪಾದಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಉತ್ಪಾದನ ಬಿಂಬಕ, ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸ್ವತಂತ್ರ ಚಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಉತ್ಪಾದನ ಬಿಂಬಕದ ಸ್ವತಂತ್ರ ಚಲಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಾವು ಭಾಗಶಃ ಡಿಫರೆನ್ಶಿಯೇಷನ್ ಮಾಡಿದರೆ, ನಮಗೆ ಸೀಮಾಂತ ಉತ್ಪಾದಕತೆಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

$$Z = 5x^2y^{1}/_{2}$$

ಇಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಗಳು ಆದಾನಗಳು ಮತ್ತು Z, ಉತ್ಪಾದನೆಯ ಪ್ರಮಾಣ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಈಗ ಈ ಬಿಂಬಕಕ್ಕೆ ಭಾಗಶಃ ಡಿಫರೆನ್ಶಿಯೇಷನ್ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ;

$\frac{\partial z}{\partial x} = 10\, xy^{1/2}$ ....x ನ ಸೀಮಾಂತ ಉತ್ಪಾದಕತೆ

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{5}{2} x^2 y^{-1/2}$$ .... y ನ ಸೀಮಾಂತ ಉತ್ಪಾದಕತೆ

ಈಗ x = 1 ಮತ್ತು y =1 ಆದರೆ ಸೀಮಾಂತ ಉತ್ಪಾದಕತೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ,

$\frac{\partial z}{\partial x} = 10$ ಮತ್ತು $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{5}{2}$ ಆಗುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ - 2 :

$Z = 5xy - 2x^2 - 3y^2$ ಉತ್ಪಾದನ ಬಿಂಬಕಕ್ಕೆ ಸೀಮಾಂತ ಉತ್ಪಾದಕತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 5y - 4x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 5x - 6y$$

x ಮತ್ತು y ನ ಬೆಲೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ 2 ಆಗಿದ್ದರೆ ಸೀಮಾಂತ ಉತ್ಪಾದಕತೆಗಳ ಮೌಲ್ಯ ಕೆಳಗಿನಂತಿರುತ್ತದೆ.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 10 - 8 = 2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 10 - 12 = -2$$

9.4 ಹೋಮೋಜಿನಸ್ ಉತ್ಪಾದನ ಬಿಂಬಕ

ಕೆಳಗಿನ ಬೇಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ :

$f(x, y) = 2x^2 + 3xy + y^2$

x ಮತ್ತು y ಗಳನ್ನು 't' ಗುಣಕದಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚು ಮಾಡೋಣ.

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= 2(tx)^2 + 3(tx)(ty) + (ty)^2 \\ &= 2t^2x^2 + 3t^2xy + t^2y^2 \\ &= t^2(2x^2 + 3xy + y^2) \\ &= t^2 f(x, y) \end{aligned}$$

ಈಗ ಪಡೆದಿರುವ ಬಿಂಬಕ, ಮೊದಲಿನ ಬಿಂಬಕಕ್ಕಿಂತ t^2 ಪ್ರಮಾಣದಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ. ಹೀಗಾದಾಗ ಈ ಬಿಂಬಕ "ಹೊಮೋಜಿನಸ್ ಫಂಕ್ಷನ್ ಆಫ್ ಡಿಗ್ರಿ 2" ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ ;

$U = f(x, y)$ ಬಿಂಬಕದಲ್ಲಿ ಸ್ವತಂತ್ರ ಚಲಗಳಾದ x ಮತ್ತು y ಗೆ, ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ 't' ಗುಣಕದಷ್ಟು ಸೇರಿಸಿದಾಗ, ಫಲಿತಾಂಶವು tk ಗುಣಕ ಪ್ರಮಾಣದಷ್ಟು ಬದಲಾದರೆ, $u = f(x, y)$ ಬಿಂಬಕವನ್ನು "ಹೋಮೋಜಿನಸ್ ಫಂಕ್ಷನ್ ಆಫ್ ಡಿಗ್ರಿ t" ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ - 2 :

ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂಬಕವು ಯಾವ ಡಿಗ್ರಿಯ ಹೋಮೋಜಿನಸ್ ಫಂಕ್ಷನ್ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

$$U = 10\,q_1^{1/2} + 5q_2^{1/2}$$

q_1 ಮತ್ತು q_2ವನ್ನು 't' ಪ್ರಮಾಣದಷ್ಟು ವೃದ್ಧಿಸಿದರೆ,

$$f\,(tq_1\ tq_2) = 10\,(tq_1)^{1/2} + 5\,(tq_2)^{1/2}$$

$$= t^{1/2}\left[\left(10q_1^{1/2}\right) + 5q_2^{1/2}\right]$$

$$= t^{1/2} \cdot f\,(q_1 \cdot q_2)$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಬಿಂಬಕವು "ಹೋಮೋಜಿನಸ್ ಡಿಗ್ರಿ ಆಫ್ 1/2"

9.5 ನಿಮ್ಮ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ

1. ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ಪಾದನ ಬಿಂಬಕಕ್ಕೆ ಸೀಮಾಂತ ಉತ್ಪಾದನ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   $$Z = 3x_1x_2 + 5x_1^2\,x_2 + 3x_2 + 8$$

   $x_1 = 1$ ಮತ್ತು $X_2=2$ ಆಗಿರುವಾಗ ಸೀಮಾಂತ ಉತ್ಪಾದಕತೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿ.

2. 'ಹೋಮೋಜಿನಸ್ ಫಂಕ್ಷನ್' ಎಂದರೇನು ವಿವರಿಸಿ.

9.6 ಕಾಬ್ ಡಗ್ಲಾಸ್ ಉತ್ಪಾದನ ಬಿಂಬಕ

$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

ಎನ್ನುವ ಉತ್ಪಾದನ ಬಿಂಬಕ, ಕಾಬ್-ಡಗ್ಲಾಸ್‌ರವರ ಹೆಸರಿನ ಬಿಂಬಕವಾಗಿದ್ದು, ಬಹಳ ಪ್ರಸಿದ್ಧವಾಗಿದೆ.

ಇಲ್ಲಿ Q ಉತ್ಪಾದನೆಯ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು K ಮತ್ತು L ಕ್ರಮವಾಗಿ ಬಂಡವಾಳ ಮತ್ತು ಶ್ರಮವನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತವೆ. A ಮತ್ತು B ಧನಾತ್ಮಕ ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಈ ಬಿಂಬಕ, ಉತ್ಪಾದನ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ ಬಹಳ ಪ್ರಚಾರದಲ್ಲಿದ್ದು, ಇಂದಿಗೂ ಸಹ ಸಂಶೋಧನಕಾರರು, ಕಾಬ್-ಡಗ್ಲಾಸ್ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ವಿವಿಧ ರೂಪಗಳಲ್ಲಿ ಬಳಸುತ್ತಾರೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಬಿಂಬಕಕ್ಕೆ ಅನೇಕ ಅನ್ವಯಗಳಿವೆ. ಇದರ ಪ್ರಮುಖ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

9.7 ಕಾಬ್-ಡಗ್ಲಾಸ್ ಉತ್ಪಾದನ ಬಿಂಬಕದ ಲಕ್ಷಣಗಳು

ಈ ಬಿಂಬಕದ ಪ್ರಮುಖ ಲಕ್ಷಣಗಳೆಂದರೆ ;

(1) ಈ ಬಿಂಬಕ ಹೋಮೋಜಿನಸ್ ಡಿಗ್ರೀ ಆಫ್ $(\alpha+\beta)$ ಆಗಿದೆ. ಕೆಳಗಿನ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

$$Q = AK^{\alpha} L^{\beta}$$

ಈಗ ಆದಾನಗಳಿಗೆ 't' ಪ್ರಮಾಣದ ವೃದ್ಧಿಯನ್ನು ಕೊಡೋಣ.

$$t\,(Q) = A\,(tK)^{\alpha}\,(tL)^{\beta}$$
$$= t^{\alpha+\beta}\,(AK^{\alpha}L^{\beta})$$
$$= t^{\alpha+\beta} \cdot Q$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಬಿಂಬಕ ಹೊಮೋಜಿನಸ್ ಡಿಗ್ರಿ ಆಫ್ $(\alpha+\beta)$ ಆಗುತ್ತದೆ.

(2) ಒಂದು ವಿಶೇಷ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ $(\alpha+\beta)=1$ ಆದರೆ ಈ ಬಿಂಬಕವನ್ನು 'ಲೀನಿಯರ್‌ಲೀ ಹೋಮೋಜಿನಸ್ ಫಂಕ್ಷನ್' ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

(3) $Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$ ಬಿಂಬಕದಲ್ಲಿ

α ಎನ್ನುವುದು, ಒಟ್ಟು ಉತ್ಪನ್ನ. Q ಬಂಡವಾಳದ ಹಿಸ್ಸೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ β ಎನ್ನುವುದು, ಒಟ್ಟು ಉತ್ಪಾದನೆ. ಇದು Qನಲ್ಲಿ ಶ್ರಮದ ಹಿಸ್ಸೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

(4) ಉತ್ಪನ್ನ ಬಿಂಬಕದ, ಐಸೋಕ್ವಾಂಟ್‌ಗಳು (ಸಮ ಉತ್ಪನ್ನ ರೇಖೆಗಳು) ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಪೀನ ಮಧ್ಯ (Convex to the origin)ವಾಗಿದ್ದು, ಎಡದಿಂದ ಬಲಕ್ಕೆ ಕೆಳಗಿಳಿಯುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ ಋಣಾತ್ಮಕ ಓಟದ ಗತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ.

9.8 ಪ್ರತಿಫಲ ದರಗಳು

ಪ್ರತಿಫಲ ದರಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳನ್ನು, ನೀವು ಮೈಕ್ರೋ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ್ದೀರಿ. ಒಂದು ಉದ್ಯಮ, ಏರಿಕೆ ಪ್ರತಿಫಲ, ಸ್ಥಿರ ಪ್ರತಿಫಲ ಮತ್ತು ಇಳಿಮುಖ ಪ್ರತಿಫಲದಲ್ಲಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡುವುದು ಸಾಧ್ಯ. ಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಒಂದು ಉತ್ಪಾದನ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ, ಅದು ಯಾವ ಪ್ರತಿಫಲದಲ್ಲಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತಿದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಸಾಧ್ಯ. ಕೆಳಗಿನ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಉತ್ಪನ್ನ ಬಿಂಬಕವು ಯಾವ ಡಿಗ್ರಿ ಆಫ್ ಹೋಮೋಜಿನಿಟಿಯ ದಾಗಿದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿದೆ ಎನ್ನುವುದರ ಮೂಲಕ, ಉತ್ಪನ್ನ ಘಟಕವು ಯಾವ ಪ್ರತಿಫಲದಲ್ಲಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತಿದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 't' ಎನ್ನುವುದು ಡಿಗ್ರೀ ಆಫ್ ಹೋಮೋಜಿನಿಟಿಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತಿದ್ದರೆ, $t = 1$ ಆಗಿರುವಾಗ ಉದ್ಯಮ ಸ್ಥಿರ ಪ್ರತಿಫಲವನ್ನು $t>1$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಏರಿಕೆ ಪ್ರತಿಫಲವನ್ನು ಮತ್ತು $t<1$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಇಳಿಮುಖ ಪ್ರತಿಫಲವನ್ನು ಅನುಭವಿಸುತ್ತಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಉದಾಹರಣೆ - 1 :

ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ಪಾದನ ಬಿಂಬಕದ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ, ಉದ್ಯಮ ಯಾವ ಪ್ರತಿಫಲ ದರದಲ್ಲಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತಿದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ನಿಗದಿ ಮಾಡಿ.

$$Z = 3x^3 + 5xy^2 + y^3$$

$$\begin{aligned}(tZ) &= 3(tx)^3 + 5(tx)(ty)^2 + (ty)^3 \\ &= 3t^3x^3 + 5t^3xy^2 + t^3y^3 \\ &= t^3(3x^3 + 5xy^2 + y^3) \\ &= t^3(Z)\end{aligned}$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಬಿಂಬಕ ಹೋಮೋಜಿನಸ್ ಡಿಗ್ರಿ ಆಫ್ 3. ಅಂದರೆ ಉದ್ಯಮ ಏರಿಕೆ ಪ್ರತಿಫಲ ದರದಲ್ಲಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ - 2 :

ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ಪಾದನ ಬಿಂಬಕದ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಉದ್ಯಮ ಯಾವ ಪ್ರತಿಫಲ ದರದಲ್ಲಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತಿದೆ ನಿಗದಿ ಮಾಡಿ.

$$Z = \frac{14}{x} - \frac{20}{y}$$

$$t(Z) = \frac{14}{tx} - \frac{20}{ty}$$

$$= \frac{1}{t}\left(\frac{14}{x} - \frac{20}{y}\right)$$

$$= \frac{1}{t} \cdot z$$

$$t(z) = t^{-1} z.$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಬಿಂಬಕದ ಡಿಗ್ರೀ ಆಫ್ ಹೋಮೋಜಿನಿಟಿ -1 ಆಗಿದೆ. ಅಂದರೆ, ಈ ಉದ್ಯಮ ಇಳಿಮುಖ ಪ್ರತಿಫಲ ನಿಯಮದ ಪ್ರಕಾರ ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ :

ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಆಧಾರಿಸಿ ಉದ್ಯಮ ಯಾವ ಪ್ರತಿಫಲ ದರದಲ್ಲಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತಿದೆ ನಿಗದಿಮಾಡಿ.

$$q_d = \frac{y^2}{100x}$$

$$t(q_d) = \frac{(ty)^2}{(100\,tx)}$$

$$t(q_d) = \frac{t^2\, y^2}{t\,100\,x}$$

$$t(q_d) = t\left(\frac{Y^2}{100x}\right)$$

$$= t.q_d$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಬಿಂಬಕದ ಡಿಗ್ರೀ ಆಫ್ ಹೋಮೋಜಿನಿಟಿ 1 ಆಗಿದೆ. ಅಂದರೆ ಉದ್ಯಮ ಸ್ಥಿರ ಪ್ರತಿಫಲ ದರದಲ್ಲಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತಿದೆ.

9.9 ಸಾರಾಂಶಿಸೋಣ

ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನೀವು ಸೀಮಾಂತ ಉತ್ಪನ್ನ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ವಿಧಾನ, ಒಂದು ಬಿಂಬಕದ ಡಿಗ್ರೀ ಆಫ್ ಹೋಮೋಜಿನಿಟಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಬಗೆ, ಕಾಬ್ ಡಗ್ಲಾಸ್ ಉತ್ಪನ್ನ ಬಿಂಬಕ ಮತ್ತು ಅದರ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ್ದೀರಿ. ಸೀಮಾಂತ ಬಿಂಬಕಗಳ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆ ಇದರಿಂದ ತಿಳಿದಂತಾಯಿತು. ಅನೇಕ ಚಲಗಳಿರುವ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಭಾಗಶಃ ಡಿಫರೆನ್ಷಿಯೇಟ್ ಮಾಡಿದರೆ, ಪ್ರತಿ ಸ್ವತಂತ್ರ ಚಲದ ಸೀಮಾಂತ ಬಿಂಬಕ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಅದು ಬೇಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕವಾಗಬಹುದು. ತುಷ್ಟಿಗುಣ ಬಿಂಬಕವಾಗಬಹುದು

ಅಥವಾ ಉತ್ಪನ್ನ ಬಿಂಬಕವಾಗಬಹುದು. ಸೀಮಾಂತ ಉತ್ಪನ್ನ ಬಿಂಬಕಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ನಾವು ಅನೇಕ ತೀರ್ಮಾನಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದು ಸಾಧ್ಯ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಹ ನಾವು ನೋಡಿದೆವು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಬೇಡಿಕೆ ಬಿಂಬಕದ ಸೀಮಾಂತ ಬಿಂಬಕಗಳ ಚಿಹ್ನೆಯ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಸರಕುಗಳು ಸ್ವತಂತ್ರವಾದುವೇ, ಪೂರಕವಾದುವೇ ಅಥವಾ ಸ್ಪರ್ಧಾತ್ಮಕವಾದುವೇ ಎಂಬುದರ ಬಗ್ಗೆ ತೀರ್ಮಾನ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದು ಸಾಧ್ಯ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ನೋಡಿದೆವು. ಹಾಗೆಯೇ ಒಂದು ಬಿಂಬಕದ ಡಿಗ್ರೀ ಆಫ್ ಹೋಮೋಜಿನಿಟಿಯನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ, ಅದು ಏರಿಕೆ, ಇಳಿಮುಖ ಅಥವಾ ಸ್ಥಿರ ಪ್ರತಿಫಲ ದರದಲ್ಲಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತಿದೆಯೇ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಸಾಧ್ಯ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಸಹ ತಿಳಿದುಕೊಂಡೆವು. ಸೀಮಾಂತ ಬಿಂಬಕಗಳು ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಪಕ ಪ್ರಯೋಜನವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ನೀವು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

9.10 ಸ್ವ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

(1) $U = 2x_1x_2 + 3x_1^2 + 2x_2^2$

ತುಷ್ಟಿಗುಣ ಬಿಂಬಕಕ್ಕೆ ಸೀಮಾಂತ ತುಷ್ಟಿಗುಣ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

$x = 2, y = 2$ ಆಗಿರುವಾಗ ಸೀಮಾಂತ ತುಷ್ಟಿಗುಣಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿ.

(2) ಕಾಬ್ ಡಗ್ಲಾಸ್ ಉತ್ಪನ್ನ ಬಿಂಬಕದ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(3) ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ಪನ್ನ ಬಿಂಬಕಕ್ಕೆ ಸೀಮಾಂತ ಉತ್ಪಾದಕತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿ.

$Z = 5x + 2y + 3$

$x = 2, y = 2$ ಆಗಿರುವಾಗ ಸೀಮಾಂತ ಉತ್ಪಾದಕತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(4) ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ಪಾದನ ಬಿಂಬಕಕ್ಕೆ ಡಿಗ್ರೀ ಆಫ್ ಹೋಮೋಜಿನಿಟಿ ಕಂಡುಹಿಡಿದು, ಉದ್ಯಮ ಯಾವ ಪ್ರತಿಫಲ ದರದಲ್ಲಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತಿದೆ ನಿಗದಿ ಮಾಡಿ.

(i) $Z = q_1^{1/2} + q_2^{1/2}$

(ii) $Z = \frac{14}{x} - \frac{20}{y}$

9.11 ಮುಂದಿನ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ

ಸಿ. ಕೆ. ರೇಣುಕಾರ್ಯ : Quantitative methods for Economists, ಅಧ್ಯಾಯ - 7.

*****

ಘಟಕ - 12 : ಮ್ಯಾಟ್ರಿಕ್ಸ್ ಬೀಜಗಣಿತ

ರಚನೆ :

12.1 ಪೀಠಿಕೆ

12.5 ಮಾತೃಕೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

12.3 ವಿವಿಧ ಬಗೆಯ ಮಾತೃಕೆಗಳು

12.4 ಮಾತೃಕೆಯ ಆಪರೇಷನ್

12.5 ನಿಮ್ಮ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ

12.6 ನಿರ್ಧಾರಕಗಳು

12.7 ಸಾರಾಂಶ

12.8 ನಿಮ್ಮ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

12.9 ಮುಂದಿನ ಓದಿಗಾಗಿ

12.1 ಪೀಠಿಕೆ

ಮಾತೃಕೆ ಬೀಜಗಣಿತ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ತುಂಬಾ ವ್ಯಾಪಕವಾಗಿ ಬಳಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನೀವು ಮಾತೃಕೆ ಎಂದರೇನು? ಮಾತೃಕೆಗಳ ಆಪರೇಷನ್‌ಗಳು ಯಾವುವು? ಮಾತೃಕೆಯಿಂದ ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುತ್ತೀರಿ. ಮಾತೃಕೆಯ ಒಂದು ಅತಿ ಮುಖ್ಯ ಅನ್ವಯವೆಂದರೆ, ಒಂದು ಸಮೂಹ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಅವ್ಯಕ್ತ ಚಲಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಕ್ರಮಾರ್ ನಿಯಮವನ್ನು ಬಳಸಿ ಅವ್ಯಕ್ತ ಚಲಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಸಹ ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನೀವು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುತ್ತೀರಿ.

12.2 ಮಾತೃಕೆಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿ

ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು ನೀಟ ಸಾಲುಗಳಾಗಿ ಆಯಾಕಾರದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವಿನ್ಯಾಸ ಅಥವಾ ವ್ಯೂಹವನ್ನು ಮಾತೃಕೆ ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಮಾತೃಕೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು ನೀಟಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಬರೆದಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಎರಡು ಆವರಣಗಳಿಂದ ಮುಚ್ಚಲಾಗುತ್ತದೆ. ವ್ಯೂಹದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮಾತೃಕೆಯ ಧಾತು ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆ 'm' ಆಗಿ ನೀಟಸಾಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆ 'n' ಆಗಿದ್ದರೆ ಅಂತಹ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು 'm x n' ಗಾತ್ರದ ಮಾತೃಕೆಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 7 & 8 \\ 9 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

A ಎಂಬ ಮಾತೃಕೆ 3x3 ಗಾತ್ರದ ಮಾತೃಕೆ 4, 5, 6 ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮಾತೃಕೆಯ ಧಾತುಗಳು

12.3 ವಿವಿಧ ಬಗೆಯ ಮಾತೃಕೆಗಳು

1. ಚದುರ ಮಾತೃಕೆ : ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯಲ್ಲಿ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು ನೀಟಸಾಲುಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅಂದರೆ 'm x n' ಆಗಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು 'ಚದುರ ಮಾತೃಕೆ' (Sqaure Matrix) ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ :

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

A ಎನ್ನುವುದು 'ಚದುರ ಮಾತೃಕೆ' (Sqaure Matrix). ಇದರ ಗಾತ್ರ 3x3. ಅಂದರೆ ಇದು ಮೂರು ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು ಮೂರು ನೀಟ ಸಾಲುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

2. ಏಕಾಂಶ ಮಾತೃಕೆ (Unit Matrix) : ಪ್ರಧಾನ ಕರ್ಣರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಧಾತು 1ಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದ್ದು ಉಳಿದ ಧಾತುಗಳು 0ಯಾಗಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು 'ಏಕಾಂಶ ಮಾತೃಕೆ' ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗೆ 3 x 3 ಏಕಾಂಶ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. ಶೂನ್ಯ ಮಾತೃಕೆ (Zero Matrix) : ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯ ಎಲ್ಲ ಧಾತುಗಳೂ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು ಶೂನ್ಯ ಮಾತೃಕೆ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. ಅದಿಶ ಮಾತೃಕೆ : ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯ ಪ್ರಧಾನ ಕರ್ಣದ ಮೇಲೆ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಧಾತುಗಳು ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು ಅದಿಶ ಮಾತೃಕೆ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರಧಾನ ಕರ್ಣದ ಮೇಲಿರುವ ಧಾತುಗಳು 2ಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿದೆ.

5. ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಮಾತೃಕೆ (Row Vector) : ಯಾವುದಾದರೂ ಮಾತೃಕೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಒಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಮಾತೃಕೆ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

6. ನೀಟ ಸಾಲಿನ ಮಾತೃಕೆ (Column Vector) : ಯಾವುದಾದರೂ ಮಾತೃಕೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ನೀಟ ಸಾಲಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು ನೀಟ ಸಾಲಿನ ಮಾತೃಕೆ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

7. **ಟ್ರಾನ್ಸ್‌ಪೋಸ್ಡ್ ಮಾತೃಕೆ (Transposed Matrix) :** ಯಾವುದಾದರೂ ಮಾತೃಕೆ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು ನೀಟ ಸಾಲಾಗಿ ಮತ್ತು ನೀಟಸಾಲನ್ನು ಅಡ್ಡಸಾಲಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಿದರೆ, ಬರುವ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಟ್ರಾನ್ಸ್‌ಪೋಸ್ಡ್ ಮಾತೃಕೆ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ :

$$A = \begin{bmatrix} 1\,5\,4 \\ 5\,6\,8 \\ 9\,4\,3 \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} 1\,5\,9 \\ 5\,6\,4 \\ 4\,8\,3 \end{bmatrix}$$

A ಟ್ರಾನ್ಸ್‌ಪೋಸ್ಡ್ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು A' ಎಂದು ಬರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

12.4 ಮಾತೃಕೆಯ ಆಪರೇಷನ್‌ಗಳು

ಮಾತೃಕೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ, ಸಂಕಲನ, ವ್ಯವಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ಮಾತೃಕೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸುವುದಕ್ಕಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಸಂಕಲನ: ಎರಡು ಮಾತೃಕೆಗಳ ಗಾತ್ರ ಒಂದೇ ಆಗಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಬಹುದು. ಅಂದರೆ ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯ ಧಾತುಗವನ್ನು ಕೂಡಿಸಬೇಕಾಗಿರುವ ಮಾತೃಕೆಯಲ್ಲಿರುವ ಸಂಬಂಧಿತ ಧಾತುವಿನೊಂದಿಗೆ ಕೂಡಿಸುವುದು ಎಂದರ್ಥ. ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(A + B) = \begin{bmatrix} 2+5 & 3+6 \\ 4+1 & 5+2 \end{bmatrix}$$

$$(A + B) = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

ಉದಾಹರಣೆ - 2 :

ಕೆಳಗಿನ ಮಾತೃಕೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ

$$A = \begin{bmatrix} 34 & 12 \\ 13 & 54 \\ 42 & 15 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 21 & 36 \\ 12 & 04 \\ 01 & 30 \end{bmatrix}$$

$$(A+B)=\begin{bmatrix}5&5&4&8\\ \\2&5&5&8\\ \\4&3&4&5\end{bmatrix}$$

ವ್ಯವಕಲನ:

A ಯಿಂದ B ಯನ್ನು ಕಳೆಯುವುದು ಎಂದರೆ, A ಮಾತೃಕೆಯ ಧಾತುಗಳಿಂದ, ಸಂಬಂಧಿತ ಧಾತುಗಳನ್ನು ಕಳೆಯುವುದು. ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

$$A=\begin{bmatrix}4&3\\ \\2&1\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}0&1\\ \\0&1\end{bmatrix}$$

$$(A-B)=\begin{bmatrix}4&2\\ \\2&0\end{bmatrix}$$

ಎರಡು ಮಾತೃಕೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರ : ಕೂಡುವಿಕೆ ಮತ್ತು ಕಳೆಯುವಿಕೆಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಂತೆ, ಎರಡು ಮಾತೃಕೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಕಷ್ಟವಾಗಿದ್ದು, ಮಾತೃಕೆಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಬೇಕಾದರೆ, ಮೊದಲು ಕೆಳಗಿನ ನಿಯಮ ತೃಪ್ತಿಯಾಗಬೇಕು.

ಯಾವ ಮಾತೃಕೆಯಿಂದ ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆಯೋ (ಉದಾಹರಣೆಗೆ A) ಮಾತೃಕೆಯ ನೀಟಸಾಲುಗಳು, ಯಾವ ಮಾತೃಕೆಯೊಡನೆ ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆಯೋ (ಉದಾಹರಣೆಗೆ B) ಮಾತೃಕೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳಿಗೆ ಸಮನಾಗಿರಬೇಕು. Aಯ ನೀಟ ಸಾಲನ್ನು N ಎಂದು ನಮೂದಿಸಿದರೆ, ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು m ಎಂದು ನಮೂದಿಸಿದರೆ, N = m ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ ಗುಣಾಕಾರ ಸಾಧ್ಯ. ಹೀಗಾದರೆ, ನಂತರ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಯಲ್ಲಿ ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡಬೇಕು. ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

$$A_{2x2}=\begin{bmatrix}3&1\\ \\2&5\end{bmatrix}\quad B_{2x2}=\begin{bmatrix}1&2\\ \\1&3\end{bmatrix}$$

Aಯ ನೀಟ ಸಾಲು (2) Bಯ ಅಡ್ಡಸಾಲಿಗೆ (2) ಸಮನಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಗುಣಾಕಾರ ಸಾಧ್ಯ.

$$A \times B = \begin{bmatrix} 3\times1 + 1\times1 & 3\times2 + 1\times3 \\ 2\times1 + 5\times1 & 2\times2 + 5\times3 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 7 & 19 \end{bmatrix}$$

ಗಮನಿಸಿ: ಯಾವುದಾದರೂ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಏಕಾಂಶ ಮಾತೃಕೆಯಿಂದ (Unit Matrix) ಗುಣಿಸಿದರೆ ಅದೇ ಮಾತೃಕೆ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1\times5 + 0\times2 = 5 \\ 0\times2 + 1\times3 = 3 \end{bmatrix}$$

$$A\times B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

ಸಾಮಾನ್ಯ ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ $a \times b = b \times a$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಮಾತೃಕೆ ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಹೀಗಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1\times5 + 2\times1 & 1\times6 + 2\times2 \\ 3\times5 + 4\times1 & 3\times6 + 4\times2 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 19 & 26 \end{bmatrix}$$

ಈಗ B x A ನೋಡೋಣ

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} 5 + 18 & 10 + 24 \\ 1 + 6 & 2 + 8 \end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} 23 & 34 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$$

ಆದ್ದರಿಂದ $A \times B \neq B \times A$

12.5 ನಿಮ್ಮ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

1. ಮಾತೃಕೆ ಎಂದರೇನು?

2. ಮಾತೃಕೆಯ ಆಪರೇಷನ್‌ಗಳಾವುವು?

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

ಆದರೆ (A+B), (A-B) (AxB) ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. ಟ್ರಾನ್ಸ್‌ಪೋಸ್ಡ್ ಮಾತೃಕೆ ಎಂದರೇನು? ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯೊಡನೆ ವಿವರಿಸಿ.

12.6 ನಿರ್ಧಾರಕಗಳು (Determinants)

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ: Aಯು ಒಂದು ಚದುರ ಮಾತೃಕೆಯಾದರೆ, ಆ ಮಾತೃಕೆಯ ಧಾತುಗಳ ಕ್ರಮವನ್ನು ಯಾವ ರೀತಿಯೂ ಬದಲಾಯಿಸದೆ, ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಗಣಿತೀಯ ವಿಧಾನದಿಂದ ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಸ್ಥಿರಾಂಕವನ್ನು A ಮಾತೃಕೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕ ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗಿನ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ನೋಡಿ.

ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧಾರಕ ಪಡೆಯುವುದಕ್ಕೋಸ್ಕರ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$|A| = (a_{11}\, a_{12} - a_{21}\, a_{12})$$

$|A|$ ಯನ್ನು A ಯ ನಿರ್ಧಾರಕ ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ : 1 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ಆದರೆ

$$|A| = (1 \times 4) - (3 \times 2)$$

$$= 4 - 6 = -2$$

ಉದಾಹರಣೆ : 2 $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$|A| = 4 \times 2 - 0 \times 5$$

$$= 8 - 0 = 8$$

ಉದಾಹರಣೆ : 3 $A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$

A 3x3 ಆಗಿರುವಾಗ ಕೆಳಗಿನ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಯಾವುದಾದರೂ, ಅಡ್ಡಸಾಲು ಅಥವಾ ನೀಟಸಾಲನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಪ್ರತಿಧಾತುವಿಗೆ + ನಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ + - + ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ನೀಡಿ ನಂತರ ಕೆಳಗಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$+3 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 3(5-12) - 4\,(1-9) + 2\,(4-15)$$
$$= 3(-7) - 4(-8) + 2(-11)$$
$$= -21 + 32 - 22$$
$$= -43 + 32 = -11$$

ಉದಾಹರಣೆ: ಕೆಳಗಿನ ಮಾತೃಕೆಗೆ ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + & - \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 0 & 1 & 9 \\ 8 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$|A| = +1\begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 9 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \end{array} - 2\begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 9 \\ 8 & 1 & 3 \end{vmatrix} \end{array} + 3\begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 0 & 9 \\ 8 & 2 & 3 \end{vmatrix} \end{array} - 5\begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 2 & 0 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$+3\left[6\begin{vmatrix} 0 & 9 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 0 & 9 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right] - 2\left[4\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}\right]$$

$$+3\left[4\begin{vmatrix} 0 & 9 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}\right] - 5\left[4\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}\right]$$

$$= [6(3-9) - 7\,(-18) + 8(-2)] - 2\,[4(3-9) - 7\,(6-72) + 8(2-8)]$$

$$+ 3\,[6(-6) + 126 - 16] - 2(-24 + 462 - 48) + 3(-72 + 396 + 32)$$

$$-5\,[-8 = 36 + 28]$$

$$= [74 - 780 + 1068 - 280] = 82$$

12.7 ಸಾರಾಂಶ

ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ಮಾತೃಕೆ ಬೀಜಗಣಿತಕ್ಕೆ ಪ್ರವೇಶಿಸಿದ್ದೀರಿ. ಮಾತೃಕೆ ಎಂದರೇನು? ಇದನ್ನು ಏಕೆ ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ. ಜೊತೆಗೆ, ಮಾತೃಕೆಯ ವಿವಿಧ ಬಗೆಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಿ ಕೊಂಡಿದ್ದೀರಿ. ಸಂಕಲನ, ವ್ಯವಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಗಳು ಎರಡು ಮಾತೃಕೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಹೇಗೆ ನಡೆಯುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಲಿತಿದ್ದೀರಿ. ಇದಲ್ಲದೆ, ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯಿಂದ ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಸಹ ನೋಡಿದ್ದೀರಿ. ನಿರ್ಧಾರಕ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ. ಅದನ್ನು ನಿದಿಷ್ಟ ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಯಲ್ಲಿ ಪಡೆಯಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ. ಮುಂದಿನ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯ ಇನ್‌ವರ್ಸ್‌ ಅನ್ನು ಹೇಗೆ ಪಡೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ? ಕ್ರಾಮರ್ ನಿಯಮವನ್ನು ಬಳಸಿ ಹೇಗೆ ಒಂದು ಗುಂಪಿನ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಅವ್ಯಕ್ತ ಚಲಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುತ್ತೀರಿ. ಅಲ್ಲೇ ಇದರ ಆರ್ಥಿಕ ಅನ್ವಯಗಳನ್ನು ಸಹ ನೋಡುತ್ತೀರಿ.

12.8 ಸ್ವಂತ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

1. ಯೂನಿಟ್ ಮಾತೃಕೆ, ಟ್ರಾನ್ಸ್‌ಪೋಸ್ ಮಾತೃಕೆಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಿ.

2. ಒಂದು ಪಕ್ಷ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ಮತ್ತು } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \text{ ಆದರೆ,}$$

ಆದರೆ, (A+B), (A-B) (AxB) ಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ಕೆಳಗಿನ ಮಾತೃಕೆಗೆ ನಿರ್ಧಾರಕನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

4. ಕೆಳಗಿನ ಮಾತೃಕೆಯ ನಿರ್ಧಾರದ ಸೊನ್ನೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 2 & 8 & 16 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

12.9 ಮುಂದಿನ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ

ಒ.ಕೆ.ರೇಣುಕಾರ್ಯ : ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಪರಿಮಾಣಾತ್ಮಕ ವಿಧಾನಗಳು ಅಧ್ಯಾಯ - 4.

ಘಟಕ - 13 : ಕ್ರಾಮರ್ ನಿಯಮ ಮತ್ತು ಅದರ ಅನ್ವಯ

ರಚನೆ :

13.1 ಪೀಠಿಕೆ

13.2 ನಿರ್ಧಾರಕದ ಲಕ್ಷಣಗಳು

13.3 ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯ-ಇನ್‌ವರ್ಸ್

13.4 ಕ್ರಾಮರ್ ನಿಯಮ

13.5 ನಿಮ್ಮ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

13.6 ರಾಷ್ಟ್ರಾದಾಯ ಮಾದರಿ

13.7 ಆದಾನ ಪ್ರದಾನ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ

13.8 ಸಾರಾಂಶ

13.9 ಸ್ವ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

13.10 ಮುಂದಿನ ಓದಿಗಾಗಿ

13.1 ಪೀಠಿಕೆ

ಹಿಂದಿನ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ಮಾತೃಕೆಗಳ ಪರಿಚಯ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದರ ಜೊತೆಗೆ, ಅದರಿಂದ ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕಲಿತಿದ್ದೀರಿ. ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನೀವು ನಿರ್ಧಾರಕದ ಮುಖ್ಯವಾದ 7 ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುತ್ತೀರಿ. ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ $a \times \frac{1}{a} = 1$ ಕಲಿತಿದ್ದೀರಿ. ಮಾತೃಕೆ ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಅದಕ್ಕೆ ಸಾಮ್ಯವಿರುವಂತೆ $A A' = I$ ಎಂಬ ನಿಯಮವನ್ನು ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನೋಡುತ್ತೀರಿ. A^{-1}ಯನ್ನು A ಇನ್‌ವರ್ಸ್ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. A^{-1}ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಹೇಗೆ? ಕೋ ಫ್ಯಾಕ್ಟರ್ ಎಂದರೇನು? ಅಡ್‌ಜಾಯಿಂಟ್ ಎಂದರೇನು? ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಸಹ ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನೀವು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೀರಿ. ಜೊತೆಗೆ ಒಂದು ಸಮೂಹದ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಅವ್ಯಕ್ತ ಚಲಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ವಿಧಾನ ಯಾವುದು? ಇದರಲ್ಲಿ ಕ್ರಾಮರ್ ನಿಯಮವನ್ನು ಹೇಗೆ ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಹ ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ಓದುತ್ತೀರಿ. ಕ್ರಾಮರ್ ನಿಯಮವನ್ನು ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಆದಾಯ ಮಾದರಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸಿ, ಸಮತೋಲನ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಆದಾಯವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವ ಬಗೆಯನ್ನು ಸಹ ನೀವು ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ಕಲಿಯುತ್ತೀರಿ. ಒಂದು ಉತ್ಪಾದನ ಘಟಕಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಆದಾನ - ವಿದಾನದ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆಯನ್ನು ಸಹ ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಮೊದಲು ನಾವು ನಿರ್ಧಾರಕದ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದರೊಂದಿಗೆ ಈ ಯೂನಿಟ್ ಅನ್ನು ಪ್ರಾರಂಭಿಸುತ್ತವೆ.

13.2 ನಿರ್ಧಾರಕದ ಲಕ್ಷಣಗಳು

ನಿರ್ಧಾರಕದ ಕೆಲವು ಮುಖ್ಯ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸುವುದು ಒಳ್ಳೆಯದು.

ಲಕ್ಷಣ-1 : ಒಂದು ನಿರ್ಧಾರಕದ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು ನೀಟ ಸಾಲಾಗಿ ಮತ್ತು ನೀಟಸಾಲನ್ನು ಅಡ್ಡ ಸಾಲಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಿದರೆ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಮೌಲ್ಯ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

ಈಗ ಅಡ್ಡ ಸಾಲನ್ನು ನೀಟ ಸಾಲಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸೋಣ.

$$B = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \quad |B| = 4 - 6 = -2$$

ಲಕ್ಷಣ-2 : ಒಂದು ನಿರ್ಧಾರಕದ 2 ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು (ಅಥವಾ ನೀಟ ಸಾಲನ್ನು) ಪರಸ್ಪರ ಬದಲಾಯಿಸಿದರೆ, ನಿರ್ಧಾರಕದ ಮೌಲ್ಯ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಕೇವಲ ಅದರ ಚಿಹ್ನೆ ಮಾತ್ರ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ :

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

ಈ ಮೊದಲನೆಯ ನೀಟ ಸಾಲನ್ನು ಎರಡನೆಯದನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ ಎರಡನೆಯದನ್ನು ಮೊದಲನೆಯದನ್ನಾಗಿ ಮಾಡೋಣ.

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = +2$$

ಲಕ್ಷಣ-3 : ಒಂದು ನಿರ್ಧಾರಕದ ಯಾವುದಾದರೂ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ (ನೀಟ ಸಾಲಿನ)ದಿಂದ 'K' ಸ್ಥಿರಾಂಕದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ, ನಿರ್ಧಾರಕದ ಮೌಲ್ಯ 'K' ಗುಣಕದಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ :

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \quad |A| = (30 - 36) = -6$$

ಈಗ ಈ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಧಾತುಗಳನ್ನು 2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸೋಣ.

$$|B| = \begin{vmatrix} 10 & 18 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \quad |B| = 60 - 72$$

$$= -12$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಮೌಲ್ಯ 2 ರಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ.

ಲಕ್ಷಣ-4 : ನಿರ್ಧಾರಕದ ಯಾವುದಾದರೂ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ (ನೀಟ ಸಾಲಿನ) ಧಾತುಗಳನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲಿಗೆ (ನೀಟ ಸಾಲಿಗೆ) ಸೇರಿಸಿದರೆ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಮೌಲ್ಯ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ :

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad |A| = 8 - 5 = 3$$

ಈಗ 2ನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು ಮೊದಲನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲಿಗೆ ಸೇರಿಸೋಣ.

$$B = \begin{vmatrix} 4+1 & 5+2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad |B| = 10-7 = 3$$

ಲಕ್ಷಣ - 5 : ನಿರ್ಧಾರಕದ ಎರಡು ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ (ನೀಟ ಸಾಲಿನ) ಧಾತುಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಮೌಲ್ಯ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \quad |A| = 2-2 = 0$$

ಲಕ್ಷಣ - 6 : ನಿರ್ಧಾರಕದ ಯಾವುದಾದರೂ ಅಡ್ಡಸಾಲು (ನೀಟ ಸಾಲು) ಮತ್ತೊಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲಿ(ನೀಟ ಸಾಲಿ)ನ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿದ್ದರೆ ಅಂತಹ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಮೌಲ್ಯ ಸೊನ್ನೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} \quad |A| = 8-8 = 0$$

ಈ ನಿರ್ಧಾರಕದಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಧಾತುಗಳು, ಮೊದಲನೆ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಧಾತುಗಳ ಎರಡಷ್ಟಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮೊದಲನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿದೆ. ಇದರಿಂದಾಗಿ ಈ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಮೌಲ್ಯ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಲಕ್ಷಣ - 7 : ಯಾವುದಾದರೂ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಒಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ (ನೀಟ ಸಾಲಿನ) ಒಂದು ಗುಣಾಂಕದಷ್ಟು ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲಿಗೆ (ನೀಟಸಾಲಿಗೆ) ಸೇರಿಸಿದರೆ ಅಥವಾ ಕಳೆದರೆ, ನಿರ್ಧಾರಕದಲ ಮೌಲ್ಯ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ :

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} \quad |A| = 20-12 = 8$$

ಈಗ ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಧಾತುಗಳ ಎರಡರಷ್ಟನ್ನು ಮೊದಲನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿಗೆ ಸೇರಿಸೋಣ.

$$|B| = \begin{vmatrix} 5+8 & 3+8 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 11 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} \quad |B| = 52-44 = 8$$

13.3 ಮಾತೃಕೆಯ ಇನ್‌ವರ್ಸ್

A^{-1} ಅನ್ನು ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯ ಇನ್‌ವರ್ಸ್ ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಅದು ಚದುರ ಮಾತೃಕೆಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಇರುತ್ತದೆ.

$AA^{-1} = I$ ಆದರೆ ಮಾತ್ರ, ಅದನ್ನು $|A$ ಯು ಇನ್‌ವರ್ಸ್ ಎಂದು ಗುರುತಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಪಕ್ಷ ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕ $|A|$ ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಮನಾದರೆ ಅದಕ್ಕೆ ಇನ್‌ವರ್ಸ್ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಅಂತಹ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಸಿಂಗ್ಯುಲಾರ್ ಮಾತೃಕೆ (Singular Matrix) ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

3 x 3 ಗಾತ್ರದ ಮಾತೃಕೆಗೆ ಇನ್‌ವರ್ಸ್ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕಲಿಯೋಣ.

$$A_{3,3} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಇದರ ನಿರ್ಧಾರಕ

$$|A| = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 0 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 2\,(-2 + 3) - 3\,(-2 + 3)$$

$$= 0 + 2 - 3 = -1$$

ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯ ಅಡ್‌ಜಾಯಿಂಟ್

ಕೋಫ್ಯಾಕ್ಟರ್ ಮಾತೃಕೆಯ 'ಟ್ರಾನ್ಸ್‌ಪೋಸ್' ಅನ್ನು ಅಡ್‌ಜಾಯಿಂಟ್ ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನೇ ಮುಂದುವರಿಸಿದರೆ,

$$A \approx \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$ ಆದರೆ

ಕೋಫ್ಯಾಕ್ಟರ್ ಮಾತೃಕೆ $= \begin{bmatrix} -15 & 2 & 9 \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$ ಇತ್ಯಾದಿ

ಅಡ್ಡ ಸಾಲನ್ನು ನೀಟ ಸಾಲು ಮಾಡಿದರೆ

$$Adj\ A = \begin{bmatrix} -15 & & \\ 2 & & \\ 9 & & \end{bmatrix} \text{ ಇತ್ಯಾದಿ}$$

ಇನ್‌ವರ್ಸ್:- ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯ ಇನ್‌ವರ್ಸ್‌ನ್ನು

$A^{-1} = \frac{Adj\ A}{|A|}$ ಎಂದು ವಿವರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ :

ಕೆಳಗಿನ ಮಾತೃಕೆಗೆ ಇನ್‌ವರ್ಸ್ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

ಮೊದಲು ಕೋಫ್ಯಾಕ್ಟರ್ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ.

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = (1-4) = -3$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-2+3) = -1$$

$$A_{13} = + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = (-8+3) = -5$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = -(-1+4) = -3$$

$$A_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = +(-1-3) = -4$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -(-4-3) = 7$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1+1) = 0$$

$$A_{32} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1-2) = -3$$

$|A| = 1 \times -3 + 1 \times -1 + 1 \times -5$

$= -3 - 1 - 5 = -9$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj\, A = \frac{1}{-9}\begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 2 & -4 & 3 \\ -5 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{9} & \frac{-7}{9} & \frac{3}{9} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \frac{-3}{-9} & \frac{-3}{-9} & \frac{0}{-9} \\ \frac{-1}{-9} & \frac{-4}{-9} & \frac{3}{-9} \\ \frac{-5}{-9} & \frac{7}{-9} & \frac{-3}{-9} \end{bmatrix}$$

ಸೂತ್ರದ ಪ್ರಕಾರ

$A A^{-1} = 1$

ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \\ 3 & -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{9} & \frac{-7}{9} & \frac{3}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ಆದ್ದರಿಂದ A^{-1}, A ಯ ಇನ್‌ವರ್ಸ್

13.5 ಕ್ರಾಮರ್ ನಿಯಮ

ಕ್ರಾಮರ್ ನಿಯಮವನ್ನನುಸರಿಸಿ, ಒಂದು ಸಮೂಹ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿನ ಅವ್ಯಕ್ತ ಚಲಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಸುಲಭ. ಕೆಳಗಿನ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = d_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = d_2$$

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಮಾತೃಕೆಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$ ಎಂದು ಬರೆಯೋಣ

ಈ ಮಾತೃಕೆಗೆ $|A| \neq 0$, ಆದ್ದರಿಂದ, X_1, ಮತ್ತು X_2 ಅವ್ಯಕ್ತ ಚಲಗಳಿಗೆ ಬೆಲೆಗಳಿವೆ ಎಂದರ್ಥ. ಒಂದು ಪಕ್ಷ A ಸಿಂಗ್ಯೂಲಾರ್ L. ಮಾತೃಕೆಯಾದರೆ, ಈಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಅವ್ಯಕ್ತ ಚಲಗಳಿಗೆ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕಾವುದಿಲ್ಲ.

$|A|$ ಗೆ ಮೌಲ್ಯವಿದೆ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಆಗ ಕ್ರಾಮರ್ ನಿಯಮದ ಪ್ರಕಾರ $X_1 = \frac{|A_1|}{|A|}$

$|A_1|$ ಎಂದರೆ $\begin{bmatrix} d_1 & a_{12} \\ d_2 & a_{22} \end{bmatrix}$ ನ ಮೌಲ್ಯ.

ಅಂದರೆ, ನಿರ್ಧಾರಕದ ಮೊದಲನೆಯ ನೀಟಸಾಲನ್ನು ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳಾದ d_1, d_2 ನಿಂದ ಬದಲಾಯಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಮೌಲ್ಯ.

ಅದೇ ರೀತಿ $X_2 = \frac{|A_2|}{|A|}$

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & d_2 \\ a_{21} & d_2 \end{bmatrix}$$

ಅಂದರೆ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಎರಡನೆಯ ನೀಟಸಾಲನ್ನು ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳಿಂದ ಬದಲಾಯಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಮೌಲ್ಯ. ಈ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ X_1 ಮತ್ತು X_2 ಗಳ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಈವಿಧಾನವನ್ನು ಕ್ರಾಮರ್ ನಿಯಮ ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ :

ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಅವ್ಯಕ್ತ ಚಲಗಳಾದ X_1 ಮತ್ತು X_2 ಗೆ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$X_1 + X_2 = 10$$

$$X_1 + 2X_2 = 15$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad d = \begin{vmatrix} 10 \\ 15 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 2 - 1 = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 15 \end{vmatrix} = 15 - 10 = 5$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 15 \end{vmatrix} = 15 - 10 = 5$$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{5}{1} = 5$$

ಆದ್ದರಿಂದ

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{5}{1} = 5$$

ಆದ್ದರಿಂದ $X_1 = 5 \;\; X_2 = 5$

ಉದಾಹರಣೆ - 2 :

ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿನ ಅವ್ಯಕ್ತ ಚಲಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ

$3X_1 + X_2 + 2X_3 = 1$

$-2X_1 + X_2 + X_3 = 5$

$X_1 + 2X_3 = 1$

ಇದನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಮಾತೃಕೆಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ;

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3\,(2-2) - 1(-4-1) + 2\,(0-1)$$

$$|A| = +6 + 5 - 2 = 9$$

$$|A| \neq 0$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಅವ್ಯಕ್ತ ಚಲಗಳಿಗೆ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬೆಲೆ ಇದೆ.

ಈಗ $|A_1|$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (2-0) - (10-1) + 2\,(0-1)$$

$$= 2 - 9 - 2$$

$$|A_1| = -9$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|A_2| = 3\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 3\,(10 - 1) - 1(-4 - 1) + 2\,(-2 - 5)$

$= 27 + 5 - 14$

$|A_2| = 18$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A_3| = 3\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$= 3\,(1 - 0) - 1(-2 - 5) + 2\,(-0 - 1)$

$|A_3| = +3 + 7 - 1 = 9$

ಆದ್ದರಿಂದ

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-9}{9} = -1$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{18}{9} = 2$$

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{9}{9} = 1$$

$X_1 = -1$, $X_2 = 2$, ಮತ್ತು $X_3 = 1$

13.5 ನಿಮ್ಮ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ

1. ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯ ಇನ್‌ವರ್ಸ್ ಎಂದರೇನು?
2. ಕೆಳಗಿನ ಮಾತೃಕೆಗೆ ಇನ್‌ವರ್ಸ್ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿನ ಅವ್ಯಕ್ತ ಚಲಗಳಿಗೆ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

13.6 ರಾಷ್ಟ್ರಾದಾಯ ಮಾದರಿ

ಕ್ರಾಮರ್ ನಿಯಮವನ್ನು ಬಳಸಿ, ಒಂದು ಸರಳ ರಾಷ್ಟ್ರಾದಾಯ ಮಾದರಿಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ವಿವರಿಸಬಹುದು.

$Y = C + Io + Go$ ....(1)

$C = a + bY$ ....(2)

ಇಲ್ಲಿ Y = ರಾಷ್ಟ್ರಾದಾಯ

Io = ಸ್ವಯಂಪ್ರೇರಿತ ಹೂಡಿಕೆ

Go = ಸರ್ಕಾರಿ ಹೂಡಿಕೆ

C = ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಅನುಭೋಗ

a, b = ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳು

ಇಲ್ಲಿ, a = ಸ್ಥಿರ ಅನುಭೋಗ

b = ಸೀಮಾಂತ ಅನುಭೋಗ ಪ್ರವೃತ್ತಿ

ಈಗ ಸಮತೋಲನ ರಾಷ್ಟ್ರಾದಾಯ (Y) ಮತ್ತು ಸಮತೋಲನ ಅನುಭೋಗ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$Y - C = Io + Go$ ....(3)

$bY + C = a$ ....(4)

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಮಾತೃಕೆ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯೋಣ;

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_o + G_o \\ a \end{bmatrix}$$

ಕ್ರಾಮರ್ ನಿಯಮವನ್ನು ಬಳಸಿ Y ಮತ್ತು C ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{bmatrix}$$

$|A| = (1 - b)$ ಇದು ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಮನಲ್ಲ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಆಗ

$$|A_1| = \begin{bmatrix} Io + Go & -1 \\ a & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A_1| = (I_o + G_o) + a$$

$$|A_2| = \begin{bmatrix} I_o & + G_o \\ -b & a \end{bmatrix}$$

$$= a + b\,(I_o + G_o)$$

$$Y = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{a + I_o + G_o}{1 - b}$$

$$C = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{a + b\,(I_o + G_o)}{(1 - b)}$$

ಆದಾನ - ವಿದಾನ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ

ಆದಾನ - ವಿದಾನ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯ ಮುಖ್ಯ ಉದ್ದೇಶ,ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉದ್ಯಮವೂ, ತಾನು ಉತ್ಪಾದಿಸುತ್ತಿರುವ ಸರಕುಗಳಿಗಿರುವ ಆಂತರಿಕ ಬೇಡಿಕೆ ಮತ್ತು ಕೈಗಾರಿಕೆಯ ಹೊರಗೆ ತನಗಿರುವ ಬೇಡಿಕೆಗಳನ್ನು, ಸಂಪನ್ಮೂಲಗಳು ಕಿಂಚಿತ್ತೂ ಅಪವ್ಯಯವಾಗದಂತೆ ನೋಡಿಕೊಂಡು ಉತ್ಪಾದಿಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡುವುದು. ಅಂದರೆ ಸಂಪನ್ಮೂಲಗಳು ಅಪವ್ಯಯವಾಗದಂತೆ ತಮಗಿರುವ ಬೇಡಿಕೆಯನ್ನು ಕರಾರುವಕ್ಕಾಗಿ ಪೂರೈಸಲು ಬೇಕಾಗಿರುವಷ್ಟು ಉತ್ಪಾದನೆಯನ್ನು ನಡೆಸುವುದು. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಹೀಗೆ ಮಾಡಿದಾಗ ಸಂಪನ್ಮೂಲಗಳು ಗರಿಷ್ಠ ಪ್ರಮಾಣದ ಉತ್ಪಾದನೆಗೆ ತೊಡಗುತ್ತವೆ. ಒಂದು ಸರಳ ಉದಾಹರಣೆಯ ಮೂಲಕ ಇದರ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಹೇಗೆ ನಡೆಯುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ;

ರಾಷ್ಟ್ರದಲ್ಲಿ ಎರಡೇ ಕೈಗಾರಿಕೆಗಳಿವೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಇವುಗಳ ಉತ್ಪಾದನೆಗೆ ಅಗತ್ಯವಾದ ಗುಣಕ ಮಾತೃಕೆ ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ.

$$A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$$

ಗುಣಕ ಮಾತೃಕೆಯ ಧಾತುಗಳನ್ನು ಅರ್ಥ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಅಗತ್ಯ. ಮೊದಲನೇ ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿನ, ಮೊದಲನೇ ನೀಟಸಾಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆ 0.40 ಇದರ ಅರ್ಥ 40 ಪೈಸೆಯಷ್ಟು ಮೊದಲನೆಯ ಸರಕು, 1 ರೂಪಾಯಿ ಮೌಲ್ಯದ ಎರಡನೇ ಸರಕನ್ನು ಉತ್ಪಾದಿಸಲು ಅಗತ್ಯ ಎಂದು. ಈ ರೀತಿಯ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಆದಾನ - ಮಾತೃಕೆ (Input Matrix) ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ ಈ ಮಾತೃಕೆಯಿಂದ (I - A) ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ.

$$(I-A) = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.1 \\ -0.2 & 0.7 \end{bmatrix}$$

ಈ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$$

ಗಳಿಂದ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲಾಗಿದೆ ಎನ್ನುವುದು ಸ್ಪಷ್ಟ.

ಈಗ $(I-A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.75 & 0.25 \\ 0.50 & 1.50 \end{bmatrix}$

ಇನ್‌ವರ್ಸ್ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಹಿಂದೆಯೇ ಕಲಿತ್ತಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ ಕೈಗಾರಿಕೆಯ ಹೊರಗೆ X_1 ಗೆ 20 ಮತ್ತು X_2 ಗೆ 15 ಘಟಕಗಳಷ್ಟು ಬೇಡಿಕೆ ಇದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ ಆಗ ಕರಾರುವಕ್ಕಾಗಿ ಉತ್ಪಾದಿಸಬೇಕಾಗುವ X_1 ಮತ್ತು X_2ಗಳ ಪ್ರಮಾಣ.

$$(I-A)^{-1} X = \begin{bmatrix} 1.75 & 0.25 \\ 0.50 & 1.50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 38.75 \\ 32.50 \end{bmatrix}$$

ಆದ್ದರಿಂದ 38.75 (ಲಕ್ಷ ರೂ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ) ಮೌಲ್ಯದ X_1 ಮತ್ತು 32.50 (ಲಕ್ಷ ರೂ ಗಳಷ್ಟು) X_2 ಗಳಷ್ಟನ್ನು ಉತ್ಪಾದಿಸಬೇಕು. ಇದರಿಂದ ಕೈಗಾರಿಕೆಗಳೆರಡೂ, ಸಂಪನ್ಮೂಲವನ್ನು ಅಪವ್ಯಯ ಮಾಡದೆ ಕರಾರುವಕ್ಕಾಗಿ X_1 ಮತ್ತು X_2 ಗಳ ಆಂತರಿಕ ಹಾಗೂ ಬಾಹ್ಯ ಬೇಡಿಕೆಗಳನ್ನು ಪೂರೈಸುವುದು ಸಾಧ್ಯ.

ಉದಾಹರಣೆ - 2 : ಒಂದು ಆರ್ಥಿಕತೆಯಲ್ಲಿ ಕೇವಲ 3 ಕೈಗಾರಿಕೆಗಳಿವೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಈ ಕೈಗಾರಿಕೆಗಳ ಆದಾನ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು (ಇದನ್ನು ತಾಂತ್ರಿಕ ಮಾತೃಕೆ ಎಂದೂ ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ) ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$$

ಈ ಸರಕುಗಳಿಗೆ ಅಂತಿಮ ಬೇಡಿಕೆ $\begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ ಆಗಿದ್ದರೆ

ಕೈಗಾರಿಕೆ ಉತ್ಪಾದಿಸಬೇಕಾದ ಮೂರು ಸರಕುಗಳ ಕರಾರುವಾಕ್ಕು ಉತ್ಪಾದನೆ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ನಿಗದಿ ಮಾಡಿ.

$$[I - A]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.9 & -0.2 \\ -0.1 & -0.3 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$[I - A]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.66 & 0.30 & 0.24 \\ 0.34 & 0.62 & 0.24 \\ 0.21 & 0.27 & 0.60 \end{bmatrix}$$

ಮೂರು ಸರಕುಗಳನ್ನು X_1 X_2 X_3 ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ.

$$[I - A]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.66 & 0.30 & 0.24 \\ 0.34 & 0.62 & 0.24 \\ 0.21 & 0.27 & 0.60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24.84 \\ 20.68 \\ 18.36 \end{bmatrix}$$

$X_1 = 24.84$ $X_2 = 20.68$ $X_3 = 78.36$

13.9 ಸಾರಾಂಶಿಸೋಣ

ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನೀವು ಮಾತೃಕೆ ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಅನ್ವಯಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಚಯ ಮಾಡಿಕೊಂಡಿದ್ದೀರಿ. ಮುಖ್ಯವಾಗಿ, ಕ್ರಾಮರ್ ನಿಯಮವನ್ನು ಬಳಸಿ, ಒಂದು ಸಮೀಕರಣ ಸಮೂಹದಲ್ಲಿನ ಅವ್ಯಕ್ತ ಚಲಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಕಲಿತಿದ್ದೀರಿ. ಇದರ ವ್ಯಾಪಕ ಬಳಕೆ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕು. ಮುಂದೆ ವಾಲ್‌ರಾ ರವರ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವಾಗ ಅನೇಕ ಮಾರುಕಟ್ಟೆಗಳಲ್ಲಿ ಬೇಡಿಕೆ - ನೀಡಿಕೆಗಳ ಕ್ರಿಯೆ ನಡೆಯುತ್ತಿರುವಾಗ ಸಮತೋಲನ ಬೆಲೆ ಹೇಗೆ ನಿರ್ಧಾರವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಕ್ರಾಮರ್ ನಿಯಮ ತುಂಬಾ ಸಹಾಯಕವಾಗುತ್ತದೆ. ಜೊತೆಗೆ ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನೀವು ಸಮತೋಲನ ರಾಷ್ಟ್ರಾದಾಯ ನಿರ್ಧಾರದ ಒಂದು ಸರಳ ಮಾದರಿಯನ್ನು ಸಹ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ್ದೀರಿ. ರಾಷ್ಟ್ರಾದಾಯ ಮಾದರಿಗಳು ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಕ್ಲಿಷ್ಟವಾದವು. ಆದರೆ, ಈ ಸರಳ ಮಾದರಿ, ಸಮತೋಲನ ರಾಷ್ಟ್ರಾದಾಯವನ್ನು ಹೇಗೆ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಿದೆ ಅಷ್ಟೇ. ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನೀವು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿರುವ ಮತ್ತೊಂದು ಮುಖ್ಯ ಪರಿಭಾವನೆ, ಆದಾನ-ವಿದಾನ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ. ಆರ್ಥಿಕತೆಯ ಅನೇಕ ಕೈಗಾರಿಕೆಗಳು, ಆಂತರಿಕ ಬೇಡಿಕೆ ಹಾಗೂ ಬಾಹ್ಯ ಬೇಡಿಕೆಗಳನ್ನು ಪೂರೈಸಬೇಕಾದರೆ, ಕರಾರುವಕ್ಕಾಗಿ ಎಷ್ಟು ಪ್ರಮಾಣದ ಉತ್ಪಾದನೆಯನ್ನು ನಡೆಸಬೇಕು? ಎನ್ನುವ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಈ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಸಮರ್ಪಕವಾಗಿ ಉತ್ತರ ನೀಡುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ಎರಡು ಕೈಗಾರಿಕೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಮಾತ್ರ ಚರ್ಚೆ ನಡೆಸಿದ್ದೇವೆ. ಆದರೆ ಈ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯನ್ನು ಅನೇಕ ಕೈಗಾರಿಕೆಗಳಿಗೆ ಸಹ ಸುಲಭವಾಗಿ ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು. ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನ ಎಲ್ಲ ಪರಿಭಾವನೆಗಳೂ ಮೈಕ್ರೋ ಮತ್ತು ಮ್ಯಾಕ್ರೋ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಬಹಳ ವ್ಯಾಪಕವಾಗಿ ಬಳಕೆಯಾಗುವಂಥವು ಎನ್ನುವುದನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

13.9 ಸ್ವ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

1. ಕ್ರಾಮರ್ ನಿಯಮವನ್ನು ಬಳಸಿ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿನ ಅವ್ಯಕ್ತ ಚಲಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $3X_1 + 2X_2 = 24$

$2X_1 + 5X_2 = 8$

(ii) $X + Y - 22 = 5$

$2X - 4Y + 3Z = 6$

$3X - 3Y + Z = 11$

(iii) $3X_1 - 3X_2 + 4X_3 = -18$

$4X_1 - 4X_2 + 4X_3 = -24$

$2X_1 - 2X_2 + 4X_3 = 6$

2. ಕೆಳಗೆ 3 ಸರಕುಗಳ ಅಂತಿಮ ಬೇಡಿಕೆ ಮತ್ತು ಆದಾನ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅಂತಿಮ ಬೇಡಿಕೆಯನ್ನು ಪೂರೈಸುವ ಉತ್ಪಾದಿಸಬೇಕಾದ X_1 X_2 X_3 ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ನಿರ್ಧಾರ ಮಾಡಿ.

$$A = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/3 & 1/2 \\ 1/4 & 1/8 & 1/4 \\ 1/3 & 1/3 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 50 \\ 100 \\ 150 \end{bmatrix}$$

13.10 ಮುಂದಿನ ಓದಿಗಾಗಿ

ಡಾ. ಪಿ.ಕೆ.ರೇಣುಕಾರ್ಯ : Quantitative methods for Economics, ಅಧ್ಯಾಯ - 9.

ರಚನೆ:

14.1 ಪೀಠಿಕೆ

14.2 ಸರಳರೇಖೆ ಬಿಂಬಕ ಕಾರ್ಯಾಚರಣೆಯ ಕಲ್ಪನೆಗಳು

14.3 ಸರಳರೇಖೆ ಬಿಂಬಕ ಕಾರ್ಯಾಚರಣೆಯ ಪರಿಭಾವನೆಗಳು

14.4 ನಕ್ಷಾ ವಿಧಾನದ ಮೂಲಕ ಸರಳರೇಖೆ ಬಿಂಬಕ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಪರಿಹಾರ

14.5 ನಿಮ್ಮ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ

14.6 ಸಿಂಪ್ಲೆಕ್ಸ್ ವಿಧಾನ

14.7 ಸ್ವ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

14.8 ಮುಂದಿನ ಓದಿಗಾಗಿ

14.1 ಪೀಠಿಕೆ

ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನೀವು ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ 'ಸರಳರೇಖೆ ಬಿಂಬಕ ಕಾರ್ಯಾಚರಣೆ ' (Linear Programming) ಎನ್ನುವ ಅತಿಮುಖ್ಯ ಪಾಠವನ್ನು ಓದುತ್ತೀರಿ. ಇದು ಆರ್ಥಿಕ ಚಲಗಳನ್ನು ಗರಿಷ್ಠಗೊಳಿಸುವ ಗಣಿತೀಯ ಕ್ರಮಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಒಬ್ಬ ಉತ್ಪಾದಕ ಎರಡು ಸರಕುಗಳನ್ನು ಉತ್ಪಾದಿಸುತ್ತಿರುವಾಗ, ಪ್ರತಿವಸ್ತುವನ್ನೂ ಎಷ್ಟು ಉತ್ಪಾದಿಸಿದರೆ ಲಾಭ ಗರಿಷ್ಠವಾಗುತ್ತದೆ? ಎನ್ನುವ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಸರಳರೇಖೆ ಬಿಂಬಕ ಕಾರ್ಯಾಚರಣೆ ಉತ್ತರ ನೀಡುತ್ತದೆ. ಈ ವಿಧಾನಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಎರಡು ಕ್ರಮಗಳನ್ನು ನೀವು ಕಲಿಯಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಮೊದಲನೆಯದು, ನಕ್ಷಾ ನಿರೂಪಣೆ, ಎರಡನೆಯದು ಸಿಂಪ್ಲೆಕ್ಸ್ ವಿಧಾನ. ಎರಡೇ ಚಲಗಳನ್ನು ಗರಿಷ್ಠಗೊಳಿಸಬೇಕಾದರೆ ಅಥವಾ ಕನಿಷ್ಠಗೊಳಿಸಬೇಕಾದರೆ, ನಕ್ಷಾ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು. ಆದರೆ ಚಲಗಳು ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾದಾಗ, ಸಿಂಪ್ಲೆಕ್ಸ್ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಸರಳ ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೂಲಕ ಇವೆರಡೂ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

14.2 ಸರಳರೇಖೆ ಬಿಂಬಕ ಕಾರ್ಯಾಚರಣೆಗೆ ಅಗತ್ಯವಿರುವ ಕಲ್ಪನೆಗಳು

1. **ಉತ್ಪಾದನೆಯ ಮಿತಿಗಳು :** ಉತ್ಪಾದನೆ ನಡೆಯುತ್ತಿರುವ ಅನೇಕ ಮಿತಿಗಳು ಯಾವಾಗಲೂ ಇರುತ್ತವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಂದು ಕಾರ್ಖಾನೆ ಕೇವಲ 8 ಗಂಟೆ ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಕಾರನ್ನು ಉತ್ಪಾದಿಸುವ ಕಾರ್ಖಾನೆ ತಿಂಗಳಿಗೆ ಕೇವಲ 30 ಕಾರುಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಉತ್ಪಾದಿಸುತ್ತದೆ. ಇತ್ಯಾದಿ ಈ ಮಿತಿಗಳ ಹಿನ್ನೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಕಾರ್ಖಾನೆ ಗರಿಷ್ಠ ಪ್ರಮಾಣದ ಲಾಭವನ್ನು ಗಳಿಸುವ ಅಥವಾ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಕನಿಷ್ಠಗೊಳಿಸುವ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರವನ್ನು ಮಾಡಲಾಗುತ್ತದೆ.

2. **ಆದಾನ - ವಿದಾನದ ಬೆಲೆಗಳು :** ಕಾರ್ಖಾನೆ ಉತ್ಪಾದನೆಯಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿರುವ ಉತ್ಪಾದನಾಂಗದ ಬೆಲೆಗಳು ಮತ್ತು ಸಿದ್ಧವಸ್ತುವಿನ ಬೆಲೆಗಳು ಕೊಡಲಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಕಾರ್ಖಾನೆ ತೀವ್ರವಾದ ಸ್ಪರ್ಧೆಯಲ್ಲಿರುವ ಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿನ ಉತ್ಪಾದನೆಯಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿರುತ್ತದೆ. ಸರಳವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಉತ್ಪಾದನಾಂಗಗಳು ಮತ್ತು ಸಿದ್ಧವಸ್ತುಗಳ ಬೆಲೆಗಳ ಮೇಲೆ ಕಾರ್ಖಾನೆ ಪ್ರಭಾವ ಬೀರುವ ಶಕ್ತಿಯನ್ನು ಪಡೆದಿರುತ್ತವೆ.

3. **ಆದಾನ - ವಿದಾನ ನಡುವೆ ಸರಳರೇಖೆ ಬಿಂಬಕ ಸಂಬಂಧವಿರುತ್ತದೆ :** ಕಾರ್ಖಾನೆ ಉತ್ಪಾದನೆಯ ಆದಾನ-ವಿದಾನಗಳ ನಡುವೆ ಸರಳರೇಖೆ ಸಂಬಂಧವಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಕಾರ್ಖಾನೆ ತನ್ನ ಉತ್ಪಾದನೆಗೆ ಅಗತ್ಯವಾದ ಉತ್ಪಾದನಾಂಗಳನ್ನು ಸ್ಥಿರ ಬೆಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ, ಕಾರ್ಖಾನೆಯ ಒಟ್ಟು ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕ ಸರಳರೇಖೆ ಬಿಂಬಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

1.3 ಸರಳರೇಖೆ ಬಿಂಬಕ ಕಾರ್ಯಾಚರಣೆಯ ಪರಿಭಾಷೆಗಳು :

1. **ಉದ್ದೇಶಿತ ಬಿಂಬಕ : (Objective function) :** ಯಾವ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಗರಿಷ್ಠಗೊಳಿಸಬೇಕೋ ಅಥವಾ ಕನಿಷ್ಠಗೊಳಿಸಬೇಕೋ, ಅದನ್ನು ಉದ್ದೇಶಿತ ಬಿಂಬಕ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾರಹರಣೆಗೆ ಒಂದು ಉದ್ಯಮಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿದಂತೆ ಲಾಭ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಗರಿಷ್ಠಗೊಳಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ ಅಥವಾ ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಕನಿಷ್ಠಗೊಳಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಲಾಭ ಬಿಂಬಕ ಮತ್ತು ವೆಚ್ಚ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಉದ್ದೇಶಿತ ಬಿಂಬಕಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. .

2. **ಮಿತಿಗಳು (Constraints) :** ಯಾವುದೇ ಉದ್ಯಮ ಉತ್ಪಾದನೆಯಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ಮಿತಿಗಳನ್ನು ಎದುರಿಸುತ್ತಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಮಿತಿಗಳನ್ನು ಗಣಿತೀಯ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಅಸಮೀಕರಣಗಳು

(inequaties) ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಒಂದು ಯಂತ್ರ ಒಮ್ಮೆಗೆ ಸತತವಾಗಿ 100 ಗಂಟೆಗಳು ಮಾತ್ರ ಕೆಲಸ ಮಾಡಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಮಿತಿಯನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಉದ್ಯಮದ ಲಾಭವನ್ನು ಗರಿಷ್ಠಗೊಳಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

3. ಧನಾತ್ಮಕ ನಿಯಮ: **(Non-negativity Conditions)** : ಸರಳರೇಖೆ ಬಿಂಬಕ ಕಾರ್ಯಾಚರಣೆಗೆ ಬಳಸುವ ಚಲಗಳು ಋಣ ಸ್ವರೂಪದ್ದಾಗಿರಲೇ ಕೂಡದು. ಅವು ಹೆಚ್ಚೆಂದರೆ ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಮನಾಗಿರಬಹುದು. ಉಳಿದಂತೆ, ಅವು ಧನ ಸ್ವರೂಪದ್ದೇ ಆಗಿರಬೇಕು.

4. **ಸರಳರೇಖೆ ಬಿಂಬಕ ಸಂಬಂಧ :** ಚಲಗಳ ನಡುವೆ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲಾಗುವ ಎಲ್ಲ ಸಂಬಂಧಗಳೂ, ಅವು ಸಮೀಕರಣ ಸ್ವರೂಪದ್ದಾಗಿರಲೀ, ಅಸಮೀಕರಣ ಸ್ವರೂಪದ್ದಗಿರಲಿ ಕೇವಲ ಸರಳರೇಖೆ ಬಿಂಬಕ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಪಡೆದಿರಬೇಕು. ಎರಡು ಚಲಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸ್ವರೂಪ ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಇದು $Y = ax + b$ ರೂಪದ್ದಾಗಿರಬೇಕು.

14.4 ನಕ್ಷಾ ವಿಧಾನದ ಮೂಲಕ ಸರಳರೇಖೆ ಬಿಂಬಕ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಪರಿಹಾರ

ಮೇಲಿನ ಕಲ್ಪನೆಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ನಾವು ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಉತ್ಪಾದನೆಯ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ, ಸರಳರೇಖೆ ಬಿಂಬಕ ಕಾರ್ಯಾಚರಣೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ನೋಡೋಣ; ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯ ಮೂಲಕ ಇದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ: ಒಂದು ಕಾರ್ಖಾನೆಯಲ್ಲಿ ಸೈಕಲ್ ಮತ್ತು ಸ್ಕೂಟರ್‌ಗಳ ಉತ್ಪಾದನೆ ನಡೆಯುತ್ತಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಇವೆರಡೂ ಸರಕುಗಳೂ ಎರಡು ಕೇಂದ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಯಂತ್ರಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗಬೇಕು. ಮೊದಲನೇ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಯಂತ್ರ ಸತತವಾಗಿ 120 ಗಂಟೆಗಳ ಕಾಲ ಕೆಲಸ ಮಾಡಬಲ್ಲದು. ಎರಡನೇ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಯಂತ್ರ ಸತತವಾಗಿ 180 ಗಂಟೆಗಳ ಕೆಲಸ ಮಾಡಬಲ್ಲದು. ಒಂದು ಸೈಕಲ್ ಅನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡಲು ಮೊದಲನೇ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಅದು 6 ಗಂಟೆಗಳಷ್ಟು ಪರಿಷ್ಕರಣಗೊಳ್ಳಬೇಕು. ಎರಡನೇ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಅದು 3 ಗಂಟೆಗಳಷ್ಟು ಪರಿಷ್ಕರಣಗೊಳ್ಳಬೇಕು. ಹಾಗೆಯೇ ಸ್ಕೂಟರ್ ಒಂದು ತಯಾರಾಗಬೇಕಾದರೆ,ಮೊದಲನೇ ಯಂತ್ರದಲ್ಲಿ ಅದು 4 ಗಂಟೆಗಳಷ್ಟು ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಯಂತ್ರದಲ್ಲಿ 10 ಗಂಟೆಗಳಷ್ಟು ಪರಿಷ್ಕರಣಗೊಳ್ಳಬೇಕು. ಒಂದು ಸೈಕಲ್ ಮಾರಾಟದಿಂದ ಉತ್ಪಾದಕನಿಗೆ, ರೂ.45 ಮತ್ತು ಒಂದು ಸ್ಕೂಟರ್ ಮಾರಾಟದಿಂದ ಅವನಿಗೆ ರೂ.55 ಲಾಭ ಬರುತ್ತದೆ. ಹೀಗಿರುವಾಗ ತನ್ನ ಲಾಭವನ್ನು ಗರಿಷ್ಠಗೊಳಿಸಬೇಕಾದರೆ ಉತ್ಪಾದಕ ಎಷ್ಟು ಸೈಕಲ್‌ಗಳು ಮತ್ತು ಎಷ್ಟು ಸ್ಕೂಟರ್‌ಗಳನ್ನು ಉತ್ಪಾದಿಸಬೇಕು?

X_1 - ಸೈಕಲ್ ಉತ್ಪಾದನೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸಲಿ.

X_2 - ಸ್ಕೂಟರ್ ಉತ್ಪಾದನೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸಲಿ.

ಆಗ ಲಾಭ $Z = 45X_1 + 55X_2$ .... (1) .

ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಉದ್ದೇಶಿತ ಬಿಂಬಕ (Objective function) ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಗರಿಷ್ಠಗೊಳಿಸಬೇಕು. ಉತ್ಪಾದನೆಯ ಮಿತಿ (Constraints) ಗಳೆಂದರೆ;

$6X_1 + 5X_2 \leq 120$ ....(2)

$3X_1 + 10X_2 \leq 180$ ....(3)

$X_1 \geq 0$ ....(4)

$X_2 \geq 0$ ....(5)

ಸಮೀಕರಣ (2) (3) (4) ಮತ್ತು (5) ಅಸಮೀಕರಣಗಳು

ಈ ಮಿತಿಗಳಲ್ಲಿ, ಉದ್ದೇಶಿತ ಬಿಂಬಕ

$Z = 45X_1 + 55X_2$ ಗರಿಷ್ಠಗೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಸರಳರೇಖ ಬಿಂಬಕ ಕಾರ್ಯಾಚರಣೆಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ಈ ಅಸಮೀಕರಣಗಳು, ಸಮೀಕರಣಗಳಾಗಿ ಪರಿವರ್ತನೆಗೊಳ್ಳಬೇಕು.

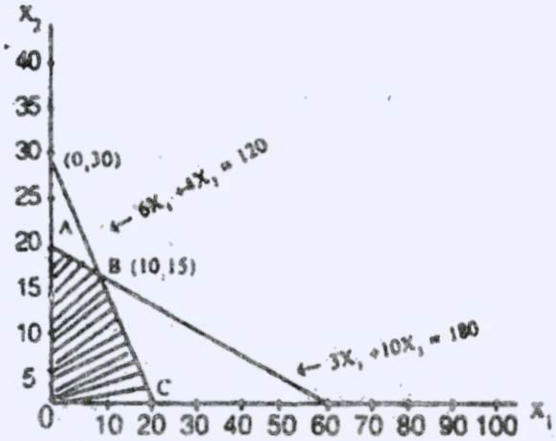
$6X_1 + 4X_2 = 120$ ....(6)

$3X_1 + 10X_2 = 180$ ....(7)

$X_1 = 0$ ....(8)

$X_2 = 0$ ....(9)

ಈ ಸರಳರೇಖ ಬಿಂಬಕಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಬಿಡಿಸಲಾಗಿದೆ.



ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿನ OABC ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಠ ಆದಾಯದ ಉತ್ಪಾದನೆಯ ಉತ್ತರಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. OABC ಬಲಭುಜ (Polygon)ದ ಮೂಲೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಉತ್ತರವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಈ ಮೂಲೆಯ ಅಂಶಗಳು ಉತ್ಪಾದನೆಯ ಮಿತಿಗಳನ್ನು ತೃಪ್ತಿಪಡಿಸುತ್ತವೆ. ಮೂಲೆಯ ಈ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಸಾಧ್ಯ ಉತ್ತರಗಳು (feasible solutions) ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

OABC ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಉತ್ಪಾದನೆಯ ಉತ್ತರಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಉತ್ಪಾದಕ ಗರಿಷ್ಠ ಪ್ರಮಾಣದ ಆದಾಯಕ್ಷೇತ್ರ O ಅಥವಾ A ಅಥವಾ B ಅಥವಾ C ಯಲ್ಲಿ ಉತ್ಪಾದನೆಯನ್ನು ನಡೆಸಬೇಕು. ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಶದಲ್ಲೂ ಅವನಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಲಾಭ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿ ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಅಂಶ	ಉತ್ತರಗಳು	ಲಾಭ : $Z = 45X_1 + 55X_2$
A	0,18	ರೂ.990
B	10,15	ರೂ.1275
C	20,0	ರೂ.900
D	0,0	ರೂ. 0.

ಮೇಲಿನ ಪಟ್ಟಿಯ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದಿಂದ ನಾವು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಕಾಣುವುದೆಂದರೆ. B ಅಂಶದಲ್ಲಿ ಉತ್ಪಾದನೆಯನ್ನು ನಡೆಸಿದರೆ ಉತ್ಪಾದಕನಿಗೆ ಗರಿಷ್ಠ ಲಾಭ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಅವನು 10 ಸೈಕಲ್‌ಗಳು ಮತ್ತು 15 ಸ್ಕೂಟರ್‌ಗಳನ್ನು ಉತ್ಪಾದಿಸಿ ಒಟ್ಟು ರೂ.1275ಗಳ ಲಾಭವನ್ನು ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾನೆ. ಉಳಿದ ಯಾವುದೇ X_1 X_2 ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಅವನಿಗೆ ಗರಿಷ್ಠಲಾಭವನ್ನು ದೊರಕಿಸಿಕೊಡುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಮೇಲಿನ ವಿವರಣೆ, ನಕ್ಷೆಯ ಮಾಧ್ಯಮದಲ್ಲಿ, ಸರಳರೇಖೆ ಬಿಂಬಿಕ ಕಾರ್ಯಾಚರಣೆ ಹೇಗೆ ಗರಿಷ್ಠ ಉತ್ಪಾದನೆ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ನಮ್ಮ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಕೇವಲ X_1 X_2 ಎಂಬ ಎರಡು ಸರಕುಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ವಾಸ್ತವ ಉತ್ಪಾದನ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ, ಅನೇಕ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಕಾರ್ಖಾನೆ ಉತ್ಪಾದಿಸುತ್ತಿರುತ್ತದೆ. ಹೀಗಾಗಿ ನಕ್ಷೆಯ ಮೂಲಕ ಗರಿಷ್ಠ ಲಾಭವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಸಾಧ್ಯವೇ ಆಗುವುದಿಲ್ಲ. ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಸಿಂಪ್ಲೆಕ್ಸ್ ವಿಧಾನವನ್ನನುಸರಿಸಿ ಕಾರ್ಯಾಚರಣೆಯ ಉದ್ದೇಶಿತ ಬಿಂಬಿಕವನ್ನು ಗರಿಷ್ಠಗೊಳಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠಗೊಳಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

14.5 ನಿಮ್ಮ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

1. ಸರಳರೇಖೆ ಬಿಂಬಕ ಕಾರ್ಯಾಚರಣೆ ಎಂದರೇನು? ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಇದರ ಪ್ರಯೋಜನವೇನು?

2. ಸರಳರೇಖೆ ಬಿಂಬಕ ಕಾರ್ಯಾಚರಣೆಯ ನಕ್ಷಾ ವಿಧಾನವನ್ನು ವಿವರಿಸಿ.

14.6 ಸಿಂಪ್ಲೆಕ್ಸ್ ವಿಧಾನ (Simplex Method)

ಸಿಂಪ್ಲೆಕ್ಸ್ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಲಾಭವನ್ನು ಗರಿಷ್ಠಗೊಳಿಸಬೇಕಾದರೆ, ಒಂದು ಪ್ರಾರಂಭಿಕ ಲಾಭ/ವೆಚ್ಚ ಸ್ಥಿತಿಯಿಂದ ಹೊರಟು ಲಾಭವನ್ನು ಗರಿಷ್ಠಗೊಳಿಸುತ್ತಾ ಹೋಗಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇಡೀ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾತೃಕೆಯ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ನಡೆಯುತ್ತದೆ. ನಕ್ಷಾವಿಧಾನದಂತೆಯೇ ಮೊದಲು ಅಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ನಕಲಿ ಚಲಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಸಮೀಕರಣಗಳಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ನಂತರ ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಮಾತೃಕೆ ಪಟ್ಟಿಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ವಿವರವಾಗಿ ಸಿಂಪ್ಲೆಕ್ಸ್ ವಿಧಾನವನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

ನಮ್ಮ ನಕ್ಷಾ ವಿಧಾನದ ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಹಿಂದಿರುಗೋಣ.

$Z = 45X_1 + 55X_2$

ಮಿತಿಗಳು

$$6x_1 + 4x_2 \leq 120$$

$$3x_1 + 10x_2 \leq 180$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

ಸಿಂಪ್ಲೆಕ್ಸ್ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗಕ್ಕೆ ನಕಲಿ ಚಲಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತದೆ.

$$6X_1 + 4X_2 + X_3 + OX_4 = 120$$

$$3X_1 + 10X_2 + OX_3 + X_4 = 180$$

ಉದ್ದೇಶಿತ ಬಿಂಬಕ

$$Z = 45\,X_1 + 55\,X_2 + X_3 + OX_3 + X_4$$

ಮೊದಲನೆಯ ಮಾತೃಕೆ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ರಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

X_2

ಮಾತೃಕೆ ಪಟ್ಟಿ -1

C_j	ಚಲಗಳು	ಪ್ರಮಾಣ	ರೂ 45	ರೂ 55	ರೂ.0	ರೂ.0
			~~X1~~	~~X2~~	X_3	X4
ರೂ.0	X_3	120	6	4	1	0
ರೂ.0	X_4	180	3	10	0	1
	Z_j	ರೂ.0	ರೂ.0	ರೂ.0	ರೂ.0	ರೂ.0
	$C_j - Z_j$	-	ರೂ.45	ರೂ.55	ರೂ.0	ರೂ.0

↑ ಗರಿಷ್ಠ ನೀಟಸಾಲು

O ಲಾಭದ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಈ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಮೇಲಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ (C_j-Z_j) ಅಡ್ಡಸಾಲು ನಿವ್ವಳ ಲಾಭವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ಚಿಹ್ನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದ್ದರೂ, ಉತ್ಪಾದಕ ತನ್ನ ಲಾಭವನ್ನು ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಈ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಧನಾತ್ಮಕ ಚಿಹ್ನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಉತ್ಪಾದಕ ತನ್ನ ಲಾಭವನ್ನು ಇನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ಉತ್ಪಾದಕ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಕನಿಷ್ಠಗೊಳಿಸುತ್ತಿದ್ದರೆ,(C_j-Z_j) ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಒಂದು ಋಣಾತ್ಮಕ ಚಿಹ್ನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದ್ದರೂ, ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಕನಿಷ್ಠಗೊಳಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯ. ಯಾವುದೇ ಋಣಾತ್ಮಕ ಚಿಹ್ನೆ ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಉತ್ಪಾದಕ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಇನ್ನ ಮುಂದಕ್ಕೆ ಕನಿಷ್ಠಗೊಳಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

C_j-Z_j ಅಡ್ಡಸಾಲು, ಒಂದು ಘಟಕದಷ್ಟು ಉತ್ಪಾದನೆಯನ್ನು ಹೆಚ್ಚುಮಾಡಿದಾಗ ಲಾಭದ ಪ್ರಮಾಣ ಎಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. Z_j ಅಡ್ಡಸಾಲು ಒಟ್ಟು ಲಾಭವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ನಿಶ್ಚಿತ ಗಣಿತೀಯ ವಿದಾನದ ಮೂಲಕ ಯಾವ ಚಲವನ್ನು ಒಂದು ಘಟಕದಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚು ಮಾಡಬೇಕು, ಯಾವ ಚಲ ನಿರ್ಗಮಿಸಬೇಕು, ಯಾವ ಚಲ ಆಗಮಿಸಬೇಕು ಎನ್ನುವುದನ್ನು ನಿರ್ಣಯಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಕ್ರಮ-ಕ್ರಮವಾಗಿ ಲಾಭವನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ಮಾಡುತ್ತಾ, ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯನ್ನು ಉತ್ತಮಗೊಳಿಸಿಕೊಂಡು ಗರಿಷ್ಠಲಾಭದವರೆಗೆ ಮುಂದುವರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. (C_j-Z_j) ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಧನಾತ್ಮಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಇದರಿಂದಾಚೆಗೆ ಲಾಭವನ್ನು ಗರಿಷ್ಠಗೊಳಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂದು ಅರ್ಥ.

ಮಾತೃಕೆ ಪಟ್ಟಿ-1ರಲ್ಲಿ (C_j-Z_j) ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಧನಾತ್ಮಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಈ ಲಾಭ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯನ್ನು ಉತ್ತಮಗೊಳಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಕೆಳಗಿನ ಕ್ರಮವನ್ನು ಅನುಸರಿಬೇಕು.

ಆಗಮಿಸುವ ಮತ್ತು ನಿರ್ಗಮಿಸುವ ಚಲಗಳು :

ಅತ್ಯಂತ ಹೆಚ್ಚು ಲಾಭವನ್ನು ಕೊಡುವ ಚಲವನ್ನು ಹುಡುಕಬೇಕು. ನಮ್ಮ ಮೇಲಿನ ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ ಅದು X_2 ಎಂದು ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು X_2 ಉತ್ಪಾದನೆಯಿಂದ ರೂ.55ರ ಲಾಭ ಬರುತ್ತಿದೆ. ಅತ್ಯಂತ ಹೆಚ್ಚು ಲಾಭವನ್ನು ಗಳಿಸುತ್ತಿರುವ ಚಲವನ್ನು ಆಗಮಿಸುವ ಚಲ (entering variable) ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಲು X_3 ಮತ್ತು X_4 ಚಲಗಳ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು 'ಗರಿಷ್ಠ ನೀಟಸಾಲಿನ' (optional column)ಮೌಲ್ಯದಿಂದ ಭಾಗಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು 'ಗರಿಷ್ಠ ನೀಟ ಸಾಲು' (optional column) ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ನಮ್ಮ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಈ ಮೌಲ್ಯಗಳು

$$\frac{120}{4} = 30$$

$$\frac{180}{10} = 18$$

ಆಗಿರುತ್ತವೆ. ಈಗ ಇವೆರಡರಲ್ಲಿ ಕಡಿಮೆ ಮೌಲ್ಯವಿರುವ 18, ನಿರ್ಗಮಿಸುವ ಚಲಕ್ಕೆ ಅಂದರೆ X_4ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮುಂದಿನ ಮಾತೃಕೆ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ X_4 ನಿರ್ಗಮಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಜಾಗವನ್ನು X_2 ಆಕ್ರಮಿಸುತ್ತದೆ.

ಇದಾದ ನಂತರ ಹೊಸ ಮಾತೃಕೆ - ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಬೇಕು. ಅದನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಮಾಡಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಹೊಸ ಮಾತೃಕೆ-ಪಟ್ಟಿಯ X_2 ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು ಅದರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಧಾತುವನ್ನು 'ಗರಿಷ್ಠ ನೀಟಸಾಲಿನ ' ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಧಾತುವಿನಿಂದ ಭಾಗಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ನಮ್ಮ ಮಾತೃಕೆ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಈ ಸಂಖ್ಯೆ 10 ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಹೊಸ X_2 ಸಾಲು ಕೆಳಗಿನ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

$$\frac{180}{1}, \frac{3}{10}, \frac{10}{10}, \frac{0}{10}, \frac{1}{10}$$

ಹೊಸ ಮಾತೃಕೆ ಪಟ್ಟಿಯ ಉಳಿದ ಸಾಲುಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಹೊಸ ಸಾಲಿನ ಧಾತುಗಳು = {ಹಳೆಯ ಸಾಲಿನ ಗರಿಷ್ಠ ಧಾತುಗಳು} - {ಹಳೆಯ ಮಾತೃಕೆ-ಪಟ್ಟಿಯ ನೀಟಸಾಲಿನ ಧಾತುಗಳು} X ಚಿಹ್ನೆ {ಹೊಸ ಸಾಲಿನ ಧಾತುಗಳು}

$$=120 - (4 \times 18) = 48$$

$$6 - (4 \times 3/10) = 24/5$$

$$4 - (4 \times 1) = 0$$

$$1 - (4 \times 0) = 1$$

$$0 - (4 \times 1/10) = -2/5$$

ಹೊಸ ಮಾತೃಕೆ ಪಟ್ಟಿಯ Z_j ಸಾಲನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲಾಗುತ್ತದೆ.

Z_j = ಒಟ್ಟು ಲಾಭ $= 0 \times 48 + 55 \times 18 = 990$

X_1ಗೆ $Z_j = (0)(24/5) + 55 \times 3/10 = \frac{33}{2}$

Xಗೆ $Z_j = (0)(0) + 55 \times 1 = 55$

X_2ಗೆ $Z_j = (0)(1) + 55 \times 0 = 0$

X_4ಗೆ $Z_j = (0 \times 23) + 55 \times 1/10 = \frac{55}{10} = \frac{11}{2}$

$C_j - Z_j$ ಪ್ರತಿ ಘಟಕಕ್ಕೆ ನಿವ್ವಳ ಲಾಭವನ್ನುಕೊಡುತ್ತದೆ. ಅದನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲಾಗುತ್ತದೆ.

$$45 - 33/2 = 57/2$$

$$55 - 55 = 0$$

$$0 - 0 = 0$$

$$0 - 11/2 = -11/2$$

ಈ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಹೊಸ ಮಾತೃಕೆ ಪಟ್ಟಿ-2 ರಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಮಾತೃಕೆ ಪಟ್ಟಿ -2

C_j	ಚಲಗಳು	ಪ್ರಮಾಣ	ರೂ.45	ರೂ.55	ರೂ. 0	ರೂ. 0
			X_1	X_2	X_3	X_4
0	X_3	48	24/5	0	1	$-2/5$
55	X_2	18	3/10	1	0	$1/10$
	Z_j	990	165/10	55	0	$-55/10$
	$C_j - Z_j$		57/2	0	0	$-11/2$

$(C_j\text{-}Z_j)$ ಪ್ರತಿಘಟಕದ ಲಾಭವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ $57/2$ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಉತ್ಪಾದಕ ತನ್ನ ಲಾಭವನ್ನು ಇನ್ನೂ ಗರಿಷ್ಠಗೊಳಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಹಿಂದಿನ ಕ್ರಮವನ್ನೇ ಅನುಸರಿಸಿ ಮಾತೃಕೆ-ಪಟ್ಟಿ 3ನ್ನು ತಯಾರಿಸಬೇಕು.

ಈಗ ಯಾವ ಚಲ ನಿರ್ಗಮಿಸಬೇಕು ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಗೊತ್ತು ಮಾಡಲು X_3 ಮತ್ತು X_2 ಚಲಗಳ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು $24/5$ ಮತ್ತು $3/10$ ಗಳಿಂದ ಭಾಗಿಸೋಣ.

$$X_3 = \frac{48}{24/5} = 10,\ X_2 = \frac{18}{3/10} = 60$$

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಸಣ್ಣ ಮೌಲ್ಯ 10 ಆದ್ದರಿಂದ X_3 ನಿರ್ಗಮಿಸುವ ಚಲ.
ಮಾತೃಕೆ ಪಟ್ಟಿ 2ರ X_3 ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲಾಗುತ್ತದೆ.

$$48 \times 5/24 = 10,\ \frac{24}{5} \times 5/24 = 1$$

$$\frac{1}{24/5} = = 5/24,\ -2/5 \times 5/24 = -2/24$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಸಾಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 10, 1, 0, $5/24$ ಮತ್ತು $-1/12$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

ಉಳಿದ ಸಾಲುಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲಾಗುತ್ತದೆ.

$18 - \left\{ \frac{3}{10} \times 10 \right\} = 18 - 3 = 5$

$\frac{3}{10} - \left\{ \frac{3}{10} \times 1 \right\} = 0$

$1 - \left\{ \frac{3}{10} \times 0 \right\} = 1$

$0 - \left\{ \frac{3}{10} \times \frac{5}{24} \right\} = -\frac{15}{240}$

$-\frac{2}{5} - \left\{ \frac{3}{10} \times -\frac{1}{12} \right\} = -\frac{2}{5} + \frac{3}{120} = \frac{1}{8}$

ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಸಾಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

$15\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ -\frac{1}{16}\ ,\ \frac{1}{8}$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

ಮಾತೃಕೆ ಪಟ್ಟಿ 2 ರ Z_j ಸಾಲು ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.

$10 \times 45 + 15 \times 55 = 1275$

$45 \times 1 + 55 \times 0 = 45$

$45 \times 0 + 55 \times 1 = 55$

$45 \times \frac{5}{24} + 55 \times -\frac{1}{16} = \frac{95}{16}$

$45 \times -\frac{1}{16} + 55 \times \frac{1}{8} = \frac{25}{8}$

C_j-Z_j ಸಾಲನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲಾಗುತ್ತದೆ.

$45 - 45 = 0$

$55 - 55 = 0$

$0 - \frac{95}{16} = -\frac{95}{16}$

$0 - \frac{25}{8} = -\frac{25}{8}$

ಮೇಲಿನ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಮಾತೃಕೆ ಪಟ್ಟಿ -3ನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಮಾತೃಕೆ ಪಟ್ಟಿ -3

C_j	ಚಲಗಳು	ಪ್ರಮಾಣ	ರೂ.45	ರೂ.55	ರೂ.0	ರೂ.0
			X_1	X_2	X_3	X_4
ರೂ.45	X_1	10	1	0	$5/24$	$-1/12$
ರೂ.55	X_2	15	0	1	$-1/16$	$1/8$
	Z_j	1275	45	55	$95/16$	$25/8$
		C_j-Z_j	0	0	$-95/16$	$-25/8$

ಮಾತೃಕೆ ಪಟ್ಟಿ 3ರಲ್ಲಿ C_j-Z_j ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಧನಾತ್ಮಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಇಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಉತ್ಪಾದಕ ತನ್ನ ಲಾಭವನ್ನು ಇನ್ನು ಗರಿಷ್ಠಗೊಳಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಹೀಗಾಗಿ ಅವನು 10 ಘಟಕಗಳಷ್ಟು X_1 ಮತ್ತು 15 ಘಟಕಗಳಷ್ಟು X_2 ವನ್ನು ಉತ್ಪಾದಿಸುತ್ತಾನೆ ಮತ್ತು ರೂ.1275ರ ಲಾಭ ಗಳಿಸುತ್ತಾನೆ.

ಮೇಲಿನ ಸಿಂಪ್ಲೆಕ್ಸ್ ವಿಧಾನದ ಅನುಕೂಲವೆಂದರೆ, ಎಷ್ಟು ಚಲಗಳಿದ್ದರೂ ಸಹ ಈ ರೀತಿಯ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಿ ಲಾಭವನ್ನು ಗರಿಷ್ಠಗೊಳಿಸುವುದು ಮತ್ತು ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಕನಿಷ್ಠಗೊಳಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯ.

14.7 ಸ್ವ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

1. ಸಿಂಪ್ಲೆಕ್ಸ್ ವಿಧಾನ, ನಕ್ಷಾವಿಧಾನಕ್ಕಿಂತ ಯಾವ ಹೆಚ್ಚಿನ ಅನುಕೂಲಗಳನ್ನು ಪಡೆದಿದೆ ವಿವರಿಸಿ.
2. ಒಂದು ಕಂಪನಿ X_1 ಮತ್ತು X_2 ಎರಡು ಸರಕುಗಳನ್ನು ಉತ್ಪಾದಿಸುತ್ತದೆ. ಅದು ತನ್ನ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಕನಿಷ್ಠಗೊಳಿಸಲು ಇಚ್ಛಿಸುತ್ತದೆ. ವೆಚ್ಚ ಬಿಂದಿಕ ಮತ್ತು ಮಿತಿಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$C = 4X_1 + 20X_2$

ಮಿತಿಗಳು $5X_1 + 2X_2 \leq 100$

$4X_1 + 2X_2 \geq 90$

$X_1, X_2 \geq 0.$

ನಕ್ಷಾ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಿ ಸರಳ ರೇಖೆ ಬಿಂಬಕ ಕಾರ್ಯಾಚರಣೆಯಮೂಲಕ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಕನಿಷ್ಠಗೊಳಿಸಿ.

14.8 ಮುಂದಿನ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ

ಸಿ.ಕೆ.ರೇಣುಕಾರ್ಯ : Quantitative Methods for Economics ಅಧ್ಯಾಯ - 10.

ಘಟಕ - 15

ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಪ್ತಿ

15.1 ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳು

15.2 ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆ

15.3 ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದವ್ಯಾಪ್ತಿ

15.4 ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ಮಿತಿಗಳು

15.5 ನಿಮ್ಮ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ

15.6 ವಿಶ್ಲೇಷಣಾತ್ಮಕ ಮತ್ತು ಅನುಗಮನ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ

15.7 ಸಾರಾಂಶಿಸೋಣ

15.8 ಸ್ವ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

15.9 ಮುಂದಿನ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ

ಘಟಕ - 15
ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಪ್ತಿ

15.1 ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ:

ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ಆಧುನಿಕ ಯುಗದಲ್ಲಿ ತುಂಬಾ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆಯನ್ನು ಪಡೆದಿರುವ ಶಾಸ್ತ್ರವಾಗಿದೆ. ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಇಂದು, ಅಧ್ಯಯನ ವಿಭಾಗ ಯಾವುದೇ ಆಗಿರಲಿ, ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಬಳಕೆ ತುಂಬಾ ರೂಢಿಯುಕ್ತವಾಗಿದೆ. ಹೀಗಾಗಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಧ್ಯಯನ ವಿಭಾಗವೂ, ಅದು ಶುದ್ಧ ವಿಜ್ಞಾನವಾಗಲಿ, ಅನ್ವಯಿಕ ವಿಜ್ಞಾನವಾಗಿರಲಿ, ಸಾಮಾಜಿಕ ಶಾಸ್ತ್ರವಾಗಲೀ, ಮಾನವಿಕ ಶಾಸ್ತ್ರವಾಗಲಿ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕೆ ಒತ್ತು ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ಅರ್ಥವನ್ನು ನಾವು ಅದರ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಅರಿಯುವುದು ಸುಲಭ.

ಬೌಲೆಯ (Bowley)ಯವರ ಪ್ರಕಾರ " ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ, ಒಂದು ಕ್ರಿಯೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಅಂಕಿ - ಅಂಶಗಳು"

ಲಾರೆನ್ಸ್ ಲಾಪಿನ್‌ರವರ ಪ್ರಕಾರ " ಅನಿಶ್ಚಿತತೆ ಇರುವ ಒಂದು ವಿಷಯವನ್ನು (ಅಥವಾ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು)ವಿಶ್ಲೇಷಿಸುವ ಒಂದು ತತ್ತ್ವ ಅಥವಾ ವಿಧಾನವನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ಒಳಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. "

ಎ. ಎಲ್. ಬಡಿಂಗ್‌ಟನ್‌ರವರ ಪ್ರಕಾರ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರವು "ಅಂದಾಜುಗಳನ್ನು ಮಾಡುವ ಮತ್ತು ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವ " ಒಂದು ವಿಜ್ಞಾನಭಾಗ

ಸೆಲಿಗ್‌ಮನ್‌ರವರ ಪ್ರಕಾರ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸುವ, ಅದನ್ನು ವ್ಯವಸ್ಥಿತವಾಗಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸುವ, ತುಲನಾತ್ಮಕವಾಗಿ ಹೋಲಿಸುವ, ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ವ್ಯವಸ್ಥಿತವಾಗಿ ತೀರ್ಮಾನಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸುವ " ಒಂದು ವಿಜ್ಞಾನ ಭಾಗವೇ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ.

ಪ್ರೊಫೆಸರ್ ಹೊರೇಸ್ ಸೆಕ್ರಿಸ್ಟ್‌ರವರು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರಕ್ಕೆ ಯುಕ್ತವಾದ ವ್ಯಾಖ್ಯಾಯನ್ನು ದೊರಕಿಸಿ ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾರೆ. ಅವರ ಪ್ರಕಾರ " ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯಾಕ್ರಿಯೆಯ ಮಾಹಿತಿಗಳ ಮೊತ್ತ. ಈ ಸಂಖ್ಯಾಮಾಹಿತಿ ಅನೇಕ ವಿಷಯಗಳಿಂದ ಪ್ರಭಾವಿತವಾಗುತ್ತಿರುತ್ತದೆ. ಹಾಗೂ ಈ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಕರಾರುವಾಕ್ಕಾಗಿ ಸಂಗ್ರಹಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಅಂಕಿ -ಅಂಶಗಳನ್ನು ಪೂರ್ವ ನಿಯೋಜಿತ ಉದ್ದೇಶಕ್ಕಾಗಿ ಸಂಗ್ರಹಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಅಂಕಿ - ಅಂಶಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ."

ಮೇಲಿನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸಿದಾಗ, ಹೊರೇಸ್ ಸೆಕ್ರಿಸ್ಟ್‌ರವರ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ಅರ್ಥವನ್ನು ತಿಳಿಸುವ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ವ್ಯಾಪಕವಾದ ದ್ದೆಂದು ತಿಳಿದು ಬರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು ಗ್ರಹಿಸಬೇಕಾದುದ್ದೆಂದರೆ, ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ, ಅಂಕಿ - ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕ್ರಮಬದ್ಧವಾಗಿ ವಿಶ್ಲೇಷಿಸುವ ವಿಜ್ಞಾನ ಭಾಗ. ಈ ಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಯುಕ್ತ ತೀರ್ಮಾನಗಳನ್ನು ಕೈಗೊಳ್ಳಲು ಮತ್ತು ಆರ್ಥಿಕ ಕ್ರಿಯೆಗಳು ಭವಿಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ವರ್ತಿಸಬಹುದು ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡಲು ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

15.2 ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆ:

ಈ ಮೊದಲೇ ಸೂಚಿಸಿರುವಂತೆ, ಸಾಮಾಜಿಕ ವಿಜ್ಞಾನದ ಎಲ್ಲ ಅಧ್ಯಯನ ಶಿಸ್ತುಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ತುಂಬಾ ಮಹತ್ವದ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಪಡೆದಿದೆ.

ಆಧುನಿಕ ವಾಣಿಜ್ಯ ವ್ಯವಹಾರಗಳು ಬಹಳ ಸಂಕೀರ್ಣಸ್ವರೂಪದ್ದಾಗಿವೆ. ಅದರಲ್ಲಿ ನಿರ್ಣಯಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರವ್ಯಾಪಕವಾಗಿ ಬಳಕೆಯಾಗುತ್ತಿದೆ. ಯಾವ ಜಾಗದಲ್ಲಿ ಮಳಿಗೆಯನ್ನು ತೆರೆಯ ಬೇಕು ಎನ್ನುವ ನಿರ್ಣಯವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲು ಸಹ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಲಾಗುತ್ತಿದೆ. ಸಂಭವನೀಯ ಶಾಸ್ತ್ರ (ಪ್ರಾಬಬಲಿಟಿ ಥಿಯರಿ) ವಂತೂ ವಾಣಿಜ್ಯದಲ್ಲಿ ನಿರ್ಣಯಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳಲು ಬಹಳ ಸಹಾಯಕವಾಗುತ್ತಿದೆ. ಮಾರುಕಟ್ಟೆಯ ಪರಿಸ್ಥಿತಿ, ಶ್ರಮದ ಬೇಡಿಕೆ - ನೀಡಿಕೆ, ಲಾಭದ ಮುಂಗಾಣುವಿಕೆ ಮುಂತಾದ ವಿಷಯಗಳಿಗೆ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ವ್ಯಾಪಕವಾಗಿ ಬಳಸಲಾಗುತ್ತಿದೆ.

ಕೇವಲ ವಾಣಿಜ್ಯ ವ್ಯವಹಾರಗಳಲ್ಲಷ್ಟೇ ಅಲ್ಲದೆ, ಎಲ್ಲಾ ಸಾಮಾಜಿಕ ವಿಜ್ಞಾನಗಳಲ್ಲಿ ಸಹ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಲಾಗುತ್ತಿದೆ. ಸಾಮಾಜಿಕ ವಿಜ್ಞಾನಗಳಲ್ಲಿ ನಡೆಯುವ ಸಂಶೋಧನೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಗಳನ್ನು ನಡೆಸಲಾಗುತ್ತಿದೆ. ಸಾಮಾಜಿಕ ವಿಜ್ಞಾನಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಶೋಧನೆ ಒಂದು ಕ್ರಿಯೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಅಂಕಿ - ಅಂಶಗಳನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸುವುದು, ವಿವಿಧ ವಿಷಯಗಳ ನಡುವೆ ಸಹ ಸಂಬಂಧವಿದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುವುದು ಈ ಕ್ರಿಯೆ ಮುಂದೆ ಹೇಗೆ ವರ್ತಿಸುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವುದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸುತ್ತದೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮಬದ್ಧವಾಗಿ ಅಭ್ಯಾಸಮಾಡಲು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ಬಹಳಮಟ್ಟಿಗೆ ನೆರವಾಗುತ್ತದೆ.

ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ಒಂದು ಪ್ರಮುಖ ಅನ್ವಯವೆಂದರೆ, ಒಂದು ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯ ಸತ್ಯಾಸತ್ಯತೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುವುದು. ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಪರಿಕಲ್ಪನೆ (ಹೈಪಾಥಿಸಿಸ್)ಯನ್ನು ಮಾಡಿಕೊಂಡು, ಕ್ರಮಬದ್ಧವಾಗಿ ಅದನ್ನು ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳಬಹುದೇ, ಅಥವಾ ತಿರಸ್ಕರಿಸಬಹುದೇ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ವಿವಿಧ ಸಂಭವನೀಯ ವಿತರಣೆಗಳನ್ನು (ಪ್ರಾಬಬಲಿಟಿ ಡಿಸ್ಟ್ರಿಬ್ಯೂಷನ್ಸ್) ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯ ಬಗ್ಗೆ ಖಚಿತವಾದ ತೀರ್ಮಾನವನ್ನು ಕೈಗೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ಮತ್ತೊಂದು ಮಹತ್ವದ ಉಪಯೋಗವೆಂದರೆ, ಒಂದು ಆರ್ಥಿಕ ಕ್ರಿಯೆಯ ಹಿಂದಿನ ಅಂಕಿ _ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿ, ಮುಂದಿನ ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಕ್ರಿಯೆ ಹೇಗೆ ವರ್ತಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ನೆರವಿನಿಂದ ಊಹಿಸಬಹುದು. ಇಂತಹ ಊಹೆಯನ್ನು ವಿವಿಧ ಸಂಭವನೀಯ ಮಟ್ಟದಲ್ಲಿ ಮಾಡಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ ಅನೇಕ ಆರ್ಥಿಕ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ನಿಯಂತ್ರಿಸುವುದು ಬಹಳ ಸುಲಭವಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಮುಂದಿನ ಐದು ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಹಣದ ಸರಬರಾಜು ಎಷ್ಟಾಗಬಹುದು? ಕೃಷಿ ಉತ್ಪಾದನೆ ಎಷ್ಟಾಗಬಹುದು? ಕಾಫಿಯ ಅನುಭೋಗ ಎಷ್ಟಾಗಬಹುದು? ಒಂದು ರಾಷ್ಟ್ರದ ಸೀಮಾಂತ ಅನುಭೋಗ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಹೇಗೆ ವರ್ತಿಸ ಬಹುದು ? ಮುಂತಾದುವನ್ನು ಊಹಿಸುವುದು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ಸಂಭವನೀಯತೆ ತತ್ವಗಳಿಂದ ಸಾಧ್ಯ. ಗಣಕಯಂತ್ರದ ಈ ಯುಗದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಆರ್ಥಿಕ ಕ್ರಿಯೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಭವಿಷ್ಯದ ವರ್ತನೆಯನ್ನು ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರ ಖಚಿತವಾಗಿ ಊಹಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದಲೇ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚಿನ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆ ದೊರೆತಿದೆ.

15.3 ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ವ್ಯಾಪ್ತಿ:

ಈಗಾಗಲೇ ನಾವು ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿರುವಂತೆ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ವ್ಯಾಪ್ತಿ ಹಿರಿದಾದುದು. ಯಾವ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಮಾಣಾತ್ಮಕವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದೋ ಅಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಬಳಸುವುದು ಸಾಧ್ಯ. ಯಾವ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಖಚಿತವಾಗಿ ಪರಿಮಾಣಾತ್ಮಕವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವೋ ಅಂತಹ ಕಡೆ, ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಬಳಸುವುದು ಕಷ್ಟ. ಆದರೂ ಇಂತಹ ಕಡೆಗಳಲ್ಲಿ ಕೂಡ ಬದಲಿ ಸೂಚಕ ಚಲಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ : ಹಣದ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಲು ಸರಕುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ಅಂಶವೇನೆಂದರೆ ಹೆಚ್ಚಿನ ಆರ್ಥಿಕ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಮಾಣಾತ್ಮಕವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ : ಬೆಲೆಗಳು, ಲಾಭ, ಉದ್ಯೋಗ, ರಾಷ್ಟ್ರಾದಾಯ ಇವುಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಖಚಿತವಾಗಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೂಲಕ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಆರ್ಥಿಕ ಕ್ರಿಯೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂದಿಸಿದಂತೆ, ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ತತ್ವಗಳನ್ನು ಅಳವಡಿಸಿ, ಅದರ ಲಾಭವನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು ಸಾಧ್ಯ.

15.4 ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ಮಿತಿಗಳು:

ಈ ಮೊದಲೇ ಸೂಚಿಸಿರುವಂತೆ, ಎಲ್ಲೆಲ್ಲಿ ಆರ್ಥಿಕ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೂಲಕ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವೋ ಅಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ತತ್ವಗಳನ್ನು ಬಳಸುವುದು ಕಷ್ಟ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ: ಆರೋಗ್ಯ, ಬಡತನ, ತುಷ್ಟಿಗುಣ, ಉದ್ಯೋಗಿ ಮತ್ತು ಮಾಲಿಕರ ಸಂಬಂಧ, ಕೈಗಾರಿಕೆಯ ಆಡಳಿತದಲ್ಲಿ, ನೌಕರರ ಭಾಗವಹಿಸುವಿಕೆ, ಇತ್ಯಾದಿ ವಿಷಯಗಳು ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಮುಖ್ಯ. ಆದರೆ ಈ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಕರಾರುವಕ್ಕಾಗಿ, ಅಂಕಿ - ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೂಲಕ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಬದಲಿ ಚಲಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ, ಈ ಕ್ರಿಯೆಗಳಿಗೆ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ತತ್ವಗಳನ್ನು ಅಳವಡಿಸಿದರೂ ಅನೇಕ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ತೃಪ್ತಿಕರವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ಮತ್ತೊಂದು ಮಿತಿಯೆಂದರೆ, ಇದರಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ನಾವು ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗಾಗಿ ವೈಯಕ್ತಿಕ ಅಂಕಿ- ಅಂಶಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚು ಪ್ರಾಧಾನ್ಯತೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಇದರಿಂದಾಗಿ ವೈಯಕ್ತಿಕ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಅಭ್ಯಸಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಇಷ್ಟೇ ಅಲ್ಲದೆ, ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವಿಶ್ವವನ್ನು (ಯೂನಿವರ್ಸ್) ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಲು ಅದರಿಂದ ಅನೇಕ ಮಾದರಿಗಳನ್ನು (ಸ್ಯಾಂಪಲ್ಸ್) ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಮಾದರಿಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವಿಶ್ವದ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆ ಮಾಡಿದಾಗ ಕೇವಲ ಸರಾಸರಿಯಲ್ಲಿ ಆ ಮಾಹಿತಿಗಳು ಲಭ್ಯವಾಗುತ್ತವೆಯೇ ಹೊರತು, ವಿಶ್ವದ ನಿಜವಾದ ಖಚಿತ ಮಾಹಿತಿ ದೊರೆಯುವುದಿಲ್ಲ. ಅನೇಕ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯಾವಿಶ್ವದ ಅಂಕಿ- ಅಂಶಗಳು ಬೃಹದಾಕಾರದ್ದಾಗಿದ್ದು, ಅದನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಲು ಮೇಲಿನ ಕ್ರಮ ಅನಿವಾರ್ಯವಾದರೂ, ನಾವು ತಿಳಿಸಿರುವ ಮಿತಿ ಇದ್ದೇ ಇರುತ್ತದೆ.

ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಕೇವಲ ತಜ್ಞರು ಬಳಸಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ. ಹೀಗೆ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರತಜ್ಞರು, ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸದಿದ್ದರೆ, ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಿಂದ ತಪ್ಪು ನಿರ್ಧಾರಗಳು ಹೊರ ಬೀಳುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದಲೇ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಮಂಡಿಸುವ ಅಂಕಿ - ಅಂಶ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಸಂಶಯಾಸ್ಪದವಾಗಿ ನೋಡಲಾಗುತ್ತದೆ. ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜೊತೆ ಬೇಕಾದಹಾಗೆ ಆಟವಾಡುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿರುವುದುರಿಂದ, ಅದನ್ನು ತುಂಬಾ ಎಚ್ಚರಿಕೆಯಿಂದ ಬಳಸಬೇಕಾದುದು ಅಗತ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ , ಆಧುನಿಕ ಯುಗದಲ್ಲಿ ಕಂಪ್ಯೂಟರ್‌ನಿಂದಾಗಿ, ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ಬಳಕೆಗೆ ತುಂಬಾ ಪ್ರಾಶಸ್ತ್ಯಬಂದಿದೆ. ಸಾಫ್ಟ್‌ವೇರ್‌ಗಳು ಲಭ್ಯವಿರುವುದರಿಂದ, ಆರ್ಥಿಕ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಗೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಬಳಸುವುದು ತುಂಬಾ ಅನುಕೂಲಕರವಾಗಿದೆ. ಹೀಗಾಗಿ ಮೇಲಿನ ಮಿತಿಗಳನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪಮಟ್ಟಿಗೆ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ.

15.5 ನಿಮ್ಮ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ

1. ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ನೀಡಿ.
2. ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ಪಾತ್ರವೇನು?
3. ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ಮಿತಿಗಳು ಯಾವುವು?

15.6 ವಿಶ್ಲೇಷಣಾತ್ಮಕ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ಅನುಗಮನ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ

ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಎರಡು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅವುಗಳೆಂದರೆ ವಿಶ್ಲೇಷಣಾತ್ಮಕ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ಅನುಗಮನ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ. ವಿಶ್ಲೇಷಣಾತ್ಮಕ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಕ್ರಿಯೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಅಂಕಿ - ಅಂಶಗಳನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿ, ಅವುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮಬದ್ಧವಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿ, ಪಟ್ಟಿಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಿ, ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ತತ್ವಗಳನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿ, ಕೇಂದ್ರೀಯ ಮಾಪಕಗಳು, ವಿಚಲನ ಮಾಪಕಗಳು ಮುಂತಾದುವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ವಿಶ್ಲೇಷಣಾತ್ಮಕ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ಮುಖ್ಯವಾಗಿ, ಸರಾಸರಿಗಳ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ, ನಕ್ಷಾನಿರೂಪಣೆ ಮುಂತಾದವುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ , ಮಧ್ಯಕ ಬಹುಳಕ, ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂ, ಮುಂತಾದುವುಗಳನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಣಾತ್ಮಕ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ವಿಶ್ಲೇಷಣಾತ್ಮಕ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು,ನಿಗಮನ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ (ಡಿಡುಕ್ಟೀವ್ ಸ್ಟಾಟಿಸ್ಟಿಕ್ಸ್) ಎಂದು ಸಹ ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ನಿಗಮನ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರಕ್ಕೆ ಪ್ರತಿಯಾಗಿ, ಅನುಗಮನ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ, ವಿಶ್ವ ಸಂಖ್ಯಾಮಾಹಿತಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ತೀರ್ಮಾನಗಳನ್ನು ಮಾದರಿಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಕೈಗೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ :ಹಾಸ್ಟಲ್‌ನಲ್ಲಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ತಿಂಗಳೊಂದಕ್ಕೆ ಸರಾಸರಿ ಎಷ್ಟು ಹಣ ಖರ್ಚು ಮಾಡುತ್ತಾರೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ, ಹಾಸ್ಟಲ್‌ನಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಂದ ಖರ್ಚಿನ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಪಡೆಯುವುದಕ್ಕೆ ತುಂಬಾ ಸಮಯ, ಹಣ, ಸಿಬ್ಬಂದಿ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗಿ, ಕೆಲವು ಆಯ್ದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಮಾದರಿಯನ್ನು ತೆಗೆದು ಕೊಂಡು, ಈ ಮಾದರಿಯಿಂದ ತಿಂಗಳೊಂದರ ಖರ್ಚಿನ ಬಗ್ಗೆ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಸಂಗ್ರಹಿಸಿ, ಆ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಆಧರಿಸಿ, ಅದಕ್ಕೆ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ಅಂದಾಜು ನಿಯಮ (ಎಸ್ಟಿಮೇಷನ್ಸ್ ಪ್ರಿನ್ಸಿಪಲ್ಸ್)ವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ, ಇಡೀ ಹಾಸ್ಟಲ್ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರೂ ಎಷ್ಟು ಹಣವನ್ನು ಖರ್ಚುಮಾಡುತ್ತಾರೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡುವುದು ಸಾಧ್ಯ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಅನುಸರಿಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅನುಗಮನ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಹೀಗೆ ಒಂದು ಸಣ್ಣ ಮಾದರಿಯ ಅಂಕಿ-ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿ, ಇಡೀ ವಿಶ್ವ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ವಿಧಾನ ಅನುಗಮನ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಬಹುಮಟ್ಟಿಗೆ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗೊಂಡಿದೆ. ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಈ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ವ್ಯಾಪಕವಾಗಿ ಬಳಸಲಾಗುತ್ತಿದೆ.

ನಿಗಮನ ಮತ್ತು ಅನುಗಮನ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರಗಳೆರಡೂ ಬಹಳ ಮುಖ್ಯವಾದವು ಮತ್ತು ಅವು ಪರಸ್ಪರ ಪೂರಕವಾದವು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು. ಇವೆರಡೂ ರೀತಿಯ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಧಾನಗಳೂ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಬಹಳ ಮುಖ್ಯವಾದವು. ಇದನ್ನು ನೀವು ಮುಂದೆ ಗಮನಿಸುತ್ತೀರಿ.

15.7 ಸಾರಾಂಶಿಸೋಣ:

ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನೀವು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ, ಅದರ ಮಿತಿಗಳು, ವ್ಯಾಪ್ತಿ, ಮಹತ್ವ, ವಿಶ್ಲೇಷಣಾತ್ಮಕ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ನಿಗಮನ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರಗಳ ನಡುವಣ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ.

ಅನೇಕರು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರಕ್ಕೆ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ನೀಡಿದ್ದಾರೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಹೊರೇಸ್ ಸೆಕ್ರಿಸ್ಟ್‌ರವರ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾದದ್ದು ಮತ್ತು ಅದು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ. ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರಸಾಮಾಜಿಕ ವಿಜ್ಞಾನಗಳಲ್ಲಿ, ಅದರಲ್ಲೂ ಅತಿ ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಬಹಳ ಉಪಯುಕ್ತ ಎಂಬ ಅಂಶವನ್ನು ಸಹ ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿದ್ದೀರಿ. ಆದರೆ ಈ ಶಾಸ್ತ್ರಕ್ಕೆ ಕೆಲವೊಂದು ಮಿತಿಗಳಿವೆ. ಯಾವ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಅಂಕಿ-ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೂಲಕ ಕರಾರುವಕ್ಕಾಗಿ ಅಳತೆ ಮಾಡುವುದಕ್ಕಾಗುವುದಿಲ್ಲವೋ ಅಂತಹ ಕಡೆ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ಅನ್ವಯ ಕಠಿಣವಾಗುತ್ತದೆ. ಬದಲಿ ಚಲಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದಾದರೂ, ಅದರಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟವಾದ ತೀರ್ಮಾನಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳುವುದು ಕಷ್ಟ ಎಂಬ ಅಂಶ ಮನನವಾಗಿದೆ. ಈ ಮಿತಿಗಳಿದ್ದಾಗ್ಯೂ, ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನಾಧರಿಸಿ, ಅನೇಕ ಚಲಗಳ ವರ್ತನೆಯನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಬಹುದು ಅಷ್ಟೇ ಅಲ್ಲದೇ ಈ ಚಲಗಳು ಮುಂದೆ ಹೇಗೆ ವರ್ತಿಸುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಹ ಅರಿಯಬಹುದು ಎಂಬ ಅಂಶವನ್ನು ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಹೀಗಾಗಿಯೇ, ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಮುಂಬರುವ ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಕೃಷಿ ಉತ್ಪಾದನೆ ಎಷ್ಟಾಗಬಹುದು? ಕೈಗಾರಿಕಾ ಬೆಳವಣಿಗೆ ಯಾವ ದರವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಬಹುದು, ಮುಂತಾದ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವುದು ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ ಆದ್ದರಿಂದ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರ, ಗಣಿತ ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಪೂರಕವಾಗಿದ್ದಾಗ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚಿನ ಮಹತ್ವ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಎಂಬುದನ್ನು ಅರಿತಿದ್ದೀರಿ. ಮುಂದಿನ ಯೂನಿಟ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಹೇಗೆ ಲಾಭದಾಯಕವಾಗಿ ಬಳಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುತ್ತೀರಿ

15.8 ಸ್ವ ಅಧ್ಯಯನದ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

1. ತಜ್ಞರಿಂದ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಗೊಳ್ಳದ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ಅನ್ವಯ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಅಪಾಯಕಾರಿ ಎಂಬ ಅಂಶವನ್ನು ಉದಾಹರಣೆಯೊಡನೆ ವಿವರಿಸಿ.

2. ಹೊರೇಸ್ ಸೆಕ್ರಿಸ್ಟ್‌ರವರ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರವ್ಯಾಖ್ಯೆ ಹೇಗೆ ತುಂಬಾ ವ್ಯಾಪಕವಾದುದು ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಸಿ.

3. ನಿಗಮನ ಮತ್ತು ಅನುಗಮನ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರಗಳ ನಡುವಣ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ವಿವರಿಸಿ.

15.9 ಮುಂದಿನ ಅಭ್ಯಾಸಕ್ಕಾಗಿ

ಸಿ.ಕೆ. ರೇಣುಕಾರ್ಯ:ಸಾಮಾಜಿಕ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ(ಚೇತನ ಬುಕ್‌ಹೌಸ್, ಮೈಸೂರು)

ಘಟಕ -16

ಅಂಕಿ - ಅಂಶಗಳ ಸಂಗ್ರಹಣೆ ಮತ್ತು ಕೋಷ್ಟಕ ತಯಾರು ಮಾಡುವ ವಿಧಾನ

16.1 ಪೀಠಿಕೆ

16.2 ಅಂಕಿ - ಅಂಶ ಸಂಗ್ರಹಣೆಯ ಉದ್ದೇಶಗಳು

16.3 ಅಂಕಿ - ಅಂಶ ಮಾಹಿತಿಯ ಮೂಲಗಳು

16.4 ಅಂಕಿ - ಅಂಶ ಪರಿಷ್ಕರಣೆ

16.5 ವರ್ಗೀಕರಣ

16.6 ಅಂಕಿ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಗಳು

16.7 ಕೋಷ್ಟಕ ತಯಾರಿಕೆ

16.8 ಸಾರಾಂಶಿಸೋಣ

16.9 ಮುಖ್ಯ ಪರಿಭಾವನೆಗಳು

16.10 ಸ್ವ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

16.11 ಮುಂದಿನ ಓದಿಗಾಗಿ

ಘಟಕ -16

ಅಂಕಿ - ಅಂಶಗಳ ಸಂಗ್ರಹಣೆ ಮತ್ತು ಕೋಷ್ಟಕ ತಯಾರು ಮಾಡುವ ವಿಧಾನ

16.1 ಪೀಠಿಕೆ

ಈಗಾಗಲೆ ನಾವು ಗಮನಿಸಿರುವಂತೆ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ಮೂಲತಃ ಅಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸುವ ಶಾಸ್ತ್ರ, ಯಾವುದೇ ಆರ್ಥಿಕ ಕ್ರಿಯೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಅಂಕಿ - ಅಂಶಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಸಂಗ್ರಹಿಸಬೇಕು ? ಎಲ್ಲಿಂದ ಸಂಗ್ರಹಿಸಬೇಕು? ನಿಖರತೆಯ ಬಗ್ಗೆ ಯಾವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಬೇಕು ? ಸಂಗ್ರಹಿಸಿರುವ ಅಂಕಿ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕ್ರಮಬದ್ಧವಾಗಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಿ, ಅದನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕವಾಗಿ ತಯಾರುಮಾಡುವ ವಿಧಾನ ಯಾವುದು ಎನ್ನುವುದರ ಬಗ್ಗೆ ತುಂಬಾ ಗಮನ ಹರಿಸಬೇಕಾದುದು ಮುಖ್ಯ. ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನಾವು ಈ ವಿಷಯಗಳ ಅಧ್ಯಯನ ನಡೆಸುತ್ತೇವೆ.

16.2 ಅಂಕಿ - ಅಂಶ ಸಂಗ್ರಹಣೆಯ ಉದ್ದೇಶಗಳು

ಮೊಟ್ಟ ಮೊದಲಿಗೆ, ನಾವು ಯಾವ ವಿಷಯದ ಬಗ್ಗೆ ಅಂಕಿ - ಅಂಶಗಳನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸುತ್ತೇವೆ ಎಂಬುದರ ಬಗ್ಗೆ ಸ್ಪಷ್ಟವಾದ ಚಿತ್ರಣ ಇರಬೇಕು. ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಕೆಳಗಿನ ಉದ್ದೇಶಗಳಿಗಾಗಿ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

1. ಈಗಾಗಲೇ ಇರುವ ಆರ್ಥಿಕ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಸತ್ಯಾಸತ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಪರಿಕ್ಷಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ.
2. ಒಂದು ಹೊಸ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಮಂಡಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ
3. ಒಂದು ಆರ್ಥಿಕ ಕ್ರಿಯೆ ಯಾವ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಅರಿಯುವುದಕ್ಕಾಗಿ.
4. ಒಂದು ಆರ್ಥಿಕ ಕ್ರಿಯೆಮುಂದೆ ಹೇಗೆ ವರ್ತಿಸುತ್ತದೆ ಎನ್ನವುದನ್ನು ತಿಳಿಯುವುದಕ್ಕಾಗಿ.

ಮೇಲಿನ ಉದ್ದೇಶಗಳು ಪೂರೈಕೆಯಾಗಬೇಕಾದರೆ, ಯಾವುದೇ ಆರ್ಥಿಕ ಕ್ರಿಯೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಅಂಕಿ -ಅಂಶಗಳ ಸಂಗ್ರಹಣೆಯಾಗಬೇಕು. ಅಂಕಿ _ಅಂಶಗಳನ್ನು ಯಾವ ಯಾವ ಮೂಲಗಳಿಂದ ಸಂಗ್ರಹಿಸಬಹುದು ಎನ್ನುವುದನ್ನು ನೋಡೋಣ;

16.3 ಅಂಕಿ - ಅಂಶ ಮಾಹಿತಿಯ ಮೂಲಗಳು

ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳನ್ನು ಎರಡು ಮೂಲಗಳಿಂದ ಸಂಗ್ರಹಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅವುಗಳೆಂದರೆ ;

(i) ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಮೂಲ

(ii) ಆನುಷಂಗಿಕ ಮೂಲ

(i) ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಮೂಲದಿಂದ ಅಂಕಿ -ಅಂಶ ಸಂಗ್ರಹಣೆ: ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಕ್ರಿಯೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಪ್ರಪ್ರಥಮವಾಗಿ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸುತ್ತಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಮೂಲದ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳು ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ನಮ್ಮ ದೇಶದಲ್ಲಿ 10ವರ್ಷಕ್ಕೊಮ್ಮೆ ನಡೆಯುವ ಜನಗಣತಿ. ಈ ಜನಗಣತಿಯಲ್ಲಿ ರಾಷ್ಟ್ರದ ಪ್ರತಿವ್ಯಕ್ತಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳನ್ನುಪ್ರಥಮವಾಗಿ ಮತ್ತು ನೇರವಾಗಿ ಸಂಗ್ರಹಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ ಕಲೆ ಹಾಕಲಾಗುವ ಅಂಕಿ -ಅಂಶಗಳನ್ನು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಮೂಲದ ಅಂಕಿ ಅಂಶಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಮೂಲದಿಂದ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳನ್ನುಸಂಗ್ರಹಿಸುವುದಕ್ಕೆ ತುಂಬಾ ಮಿತಿಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳೆಂದರೆ ಇದಕ್ಕೆ ತುಂಬಾ ಹಣ, ಸಮಯ, ಸಿಬ್ಬಂದಿ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಕೇವಲ ತುಂಬಾ ಅಗತ್ಯವಿರುವ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಮೂಲದಿಂದ ಅಂಕಿ -ಅಂಶವನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ ಆರ್ಥಿಕ ಕ್ರಿಯೆ ಸಣ್ಣ ಪ್ರಮಾಣದಾಗಿದ್ದು, ಅದನ್ನು ನೀವು ನೇರವಾಗಿ ನೋಡಿ ಅಂಕಿ -ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕ್ಷಿಪ್ರವಾಗಿ ಸಂಗ್ರಹಿಸಬಹುದಾಗಿರುವ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಸಹ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಮೂಲದಿಂದ ಅಂಕಿ -ಅಂಶಗಳನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

(ii) ಆನುಷಂಗಿಕ ಮೂಲದಿಂದ ಅಂಕಿ -ಅಂಶ ಸಂಗ್ರಹಣೆ: ಯಾವುದಾದರೂ ಕ್ರಿಯೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಈಗಾಗಲೇ ಅಂಕಿ - ಅಂಶಗಳನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ್ದರೆ, ಮತ್ತು ಆ ಮೂಲದಿಂದ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳನ್ನುಕೆಲವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ಉಪಯೋಗಕ್ಕಾಗಿ ಸಂಗ್ರಹಿಸುತ್ತಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಆನುಷಂಗಿಕ ಮೂಲ ಅಥವಾ ದ್ವಿತೀಯ ಮೂಲದಿಂದ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳ ಸಂಗ್ರಹಣೆ ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಅನೇಕ ಸರ್ಕಾರಿ ಹಾಗೂ ಖಾಸಗಿ ಸಂಸ್ಥೆಗಳು ಮೂಲ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳನ್ನುಸಂಗ್ರಹಿಸುತ್ತವೆ. ಇದರಿಂದ ಅಗತ್ಯವಿರುವ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳು ಅಥವಾ ಸಂಸ್ಥೆಗಳು, ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಪಡೆದು ಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ವಿಶ್ವ ಬ್ಯಾಂಕು ತನ್ನ ವಾರ್ಷಿಕ ವರದಿಯಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳನ್ನುಪ್ರಕಟಿಸುತ್ತದೆ. ಸಂಶೋಧನೆಗಾಗಿ ಅನೇಕರು ಈ ಮೂಲದಿಂದ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳನ್ನುಪಡೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾರೆ. ಕೇಂದ್ರ ಸರ್ಕಾರ ತನ್ನ ವಾರ್ಷಿಕ ಸಮೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ರಾಷ್ಟ್ರದ ಆರ್ಥಿಕತೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳನ್ನುಪ್ರಕಟಿಸುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ ರಿಸರ್ವ್‌ಬ್ಯಾಂಕ್ ಹಣಕಾಸು ಕ್ಷೇತ್ರಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಅನೇಕ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳನ್ನುಪ್ರಕಟಿಸುತ್ತದೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಆಸಕ್ತರು ತಮ್ಮ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕೆ ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಾರೆ. ಹೀಗೆ ಬಳಸಲಾಗುವ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳನ್ನು ದ್ವಿತೀಯ ಮೂಲದ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳೆಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಮೂಲದಿಂದ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳ ಸಂಗ್ರಹಣೆ ವಿಧಾನ

ಕೆಳಗಿನ ಕ್ರಮಗಳ ಮೂಲಕ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳನ್ನುಪಡೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತದೆ.

(i) ಸಮೀಕ್ಷಾವಿಧಾನ
(ii) ಪ್ರಶ್ನಾವಳಿಗಳ ಮೂಲಕ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳ ಸಂಗ್ರಹಣೆ
(iii) ಷೆಡ್ಯೂಲ್‌ಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳ ಸಂಗ್ರಹಣೆ
(iv) ಸಂದರ್ಶನ ವಿಧಾನ
(v) ಪತ್ರ ವ್ಯವಹಾರದ ವಿಧಾನ
(iv) ಟೆಲಿಫೋನ್ ಮೂಲಕ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳ ಸಂಗ್ರಹಣೆ

(i) ಸಮೀಕ್ಷಾವಿಧಾನ: ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಮೂಲದ ಪ್ರಕಾರ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳನ್ನುಸಂಗ್ರಹಿಸಲು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಸಮೀಕ್ಷಾ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಸಂಶೋಧಕರು ಅಥವಾ ಅವರಿಗೆ ಸಮೀಕ್ಷೆಗೆ ನೆರವಾಗುವವರು, ನೇರವಾಗಿ , ವ್ಯಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಅಥವಾ ಕಂಪನಿಗಳನ್ನು ಸಂಪರ್ಕಿಸಿ, ಅಗತ್ಯ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಸಮೀಕ್ಷೆ ನಡೆಸುವಾಗ ಅನೇಕ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಅವುಗಳೆಂದರೆ;

(ಅ) ಸಮೀಕ್ಷೆಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯನ್ನು ಗೊತ್ತು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು
(ಆ) ಯಾವ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ತಂತ್ರಗಳನ್ನು ಬಳಸಬೇಕು
(ಇ) ಯಾವ ಮೂಲದಿಂದ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.?
(ಈ) ಸಮೀಕ್ಷೆಗೆ ತಗಲುವ ಸಮಯ, ಮತ್ತು ವೆಚ್ಚ.
(ಉ) ಸಮೀಕ್ಷೆಯಿಂದ ಎಷ್ಟರ ಮಟ್ಟಿಗಿನ ಖಚಿತತೆಯನ್ನು ನಿರೀಕ್ಷಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ಮೇಲಿನ ವಿಷಯಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಸಮೀಕ್ಷೆಗಿಂತ ಮೊದಲೇ ಖಚಿತ ನಿರ್ಧಾರಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾದುದುಅಗತ್ಯ.

ಸಮೀಕ್ಷೆಯನ್ನು ಪ್ರಶ್ನಾವಳಿಯ ಸಹಾಯದಿಂದ ಅಥವಾ ಷೆಡ್ಯುಲ್ ಸಹಾಯದಿಂದ ನಡೆಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಪ್ರಶ್ನಾವಳಿಯನ್ನು ಎಚ್ಚರಿಕೆಯಿಂದ ತಯಾರಿಸಿ ಅಗತ್ಯಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಪಡೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಮೊದಲು ಉತ್ತಮ ಪ್ರಶ್ನಾವಳಿಯ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ;

ಒಂದು ಒಳ್ಳೆಯ ಪ್ರಶ್ನಾವಳಿಯಲ್ಲಿ ಇರಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು

ಸಮೀಕ್ಷಾ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಬಳಸಬೇಕಾದ ಪ್ರಶ್ನಾವಳಿ ಗುಣಮಟ್ಟದ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಉತ್ತಮವಾಗಿರಬೇಕಾದರೆ ಕೆಲವು ಅಂಶಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಅಂಶಗಳೆಂದರೆ

(i) ಕೇಳಬೇಕಾಗಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ನೇರವಾಗಿರಬೇಕು ಮತ್ತು ಸರಳವಾಗಿರಬೇಕು.
(ii) ಸಾಧ್ಯವಾದಷ್ಟು ಮಟ್ಟಿಗೆ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು, ಹೌದು ಅಥವಾ ಇಲ್ಲ ಎಂಬ ರೀತಿಯ ಉತ್ತರವನ್ನು ಬಯಸುವಂತಿರಬೇಕು. ಏಕೆಂದರೆ ಉತ್ತರ ಹೇಳುವವರಿಗೆ ಹೆಚ್ಚು ಸಮಯವಿರುವುದಿಲ್ಲ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಮನಸ್ಸನಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.
(iii) ಗ್ರಾಮಾಂತರ ಪ್ರದೇಶದ ಜನರಿಗಾಗಿ ಅಥವಾ ಅಷ್ಟು ವಿದ್ಯಾವಂತರಲ್ಲದವರಿಗಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನಾವಳಿ ತಯಾರಾಗಿದ್ದರೆ ಸಾಧ್ಯವಿದ್ದಷ್ಟು ಪ್ರಶ್ನಾವಳಿ ಪ್ರಾಂತೀಯ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿರಬೇಕು.

(iv) ಪ್ರಶ್ನಾವಳಿಯಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ಇರಬಾರದು.

(v) ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ತರ್ಕಬದ್ಧವಾಗಿ ಒಂದರ ನಂತರ ಒಂದಕ್ಕೆ ಉತ್ತರ ಬೇಡುವಂತಿರಬೇಕು.

(vi) ಉತ್ತರ ಹೇಳುವವರ ಮನಸ್ಸನ್ನು ನೋಯಿಸುವ ಅಥವಾ ಚುಚ್ಚುವ ರೀತಿಯ ಯಾವುದೇ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಪ್ರಶ್ನಾವಳಿ ಒಳಗೊಂಡಿರಬಾರದು.

(vii) ಎಲ್ಲರಿಗೂ ಮಾದರಿಯ ಪ್ರಶ್ನಾವಳಿಯನ್ನು ಹಂಚುವುದಕ್ಕೆ ಮುಂಚೆ, ಕೆಲವರಿಗೆ ಅದನ್ನು ನೀಡಿ ಉತ್ತರ ಪಡೆದು, ಅಗತ್ಯವಿದ್ದರೆ ಪ್ರಶ್ನಾವಳಿಯನ್ನು ಪರಿಷ್ಕರಿಸಿ, ಮರು ಪ್ರಶ್ನಾವಳಿಯನ್ನು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಬೇಕು.

(iii) ಷೆಡ್ಯುಲ್ ಮೂಲಕ ಅಂಕಿ - ಅಂಶಗಳ ಸಂಗ್ರಹಣೆ

ಅನೇಕ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಜನರ ಬಳಿಗೆ, ಸಂಶೋಧಕರೇ ಹೋಗಿ ಸಮೀಕ್ಷೆ ನಡೆಸಿ, ತಮ್ಮ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರ ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಪ್ರಶ್ನಾವಳಿಯನ್ನು ಉತ್ತರ ನೀಡುವವರು ಭರ್ತಿಮಾಡುತ್ತಾರೆ. ಸಂಶೋಧಕರು ಅಥವಾ ಸಂಶೋಧನಾ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು, ತಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರ ಪಡೆಯುವುದು ಈ ಮಾರ್ಗದಿಂದ ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಉತ್ತರ ಕೊಡುವವರನ್ನು ನೇರವಾಗಿ ಸಂಪರ್ಕಿಸುವುದು ಈ ವಿಧಾನಕ್ಕಿರುವ ಮತ್ತೊಂದು ಅನುಕೂಲ. ಆದರೆ ಷೆಡ್ಯುಲ್ ತಯಾರು ಮಾಡುವಾಗ, ಮೇಲೆ ನಾವು ಪ್ರಶ್ನಾವಳಿ ತಯಾರಿಕೆಗೆ ವಿವರಿಸಿರುವ ಎಚ್ಚರಿಕೆಯನ್ನೇ ವಹಿಸಬೇಕಾದುದು ಅಗತ್ಯ.

(iv) ಸಂದರ್ಶನ ವಿಧಾನ: ಸಂದರ್ಶನ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಅಗತ್ಯವಾದ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳನ್ನು ಸಂಶೋಧಕರು, ನೇರವಾಗಿ ಉತ್ತರ ನೀಡಬೇಕಾಗಿರುವವರನ್ನು ಸಂದರ್ಶಿಸಿ ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾರೆ. ಇದು ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳನ್ನುಪಡೆಯುವ ನೇರ ವಿಧಾನ. ಈ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಅಂಕಿ-ಅಂಶ ಸಂಗ್ರಹಣೆಯ ಬಗ್ಗೆ ಬರಬಹುದಾದ ತಪ್ಪುಗಳು ಬಹುಮಟ್ಟಿಗೆ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಸಂದರ್ಶಕರಿಗೆ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನನುಸರಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಸಾಕಷ್ಟು ಸಮಯ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

(v) ಪತ್ರವ್ಯವಹಾರ ವಿಧಾನ: ಕೆಲವು ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳನ್ನುಪತ್ರ ವ್ಯವಹಾರದ ಮೂಲಕವೇ ಸಂಗ್ರಹಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಜನರನ್ನು / ಕಂಪನಿಗಳನ್ನು ಸಂಪರ್ಕಿಸಿ, ಕೆಲವು ರೀತಿಯ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾದಾಗ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

(vi) ಟೆಲಿಫೋನ್ ಮೂಲಕ ಅಂಕಿ - ಅಂಶ ಸಂಗ್ರಹಣೆ: ಅನೇಕ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ, ಕೇವಲ ಟೆಲಿಫೋನ್ ಮೂಲಕವೇ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಸಮಸ್ಯೆ ಸಣ್ಣದಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಅಗತ್ಯವಿರುವವರ ಬಳಿಯಲ್ಲಿ ಟೆಲಿಫೋನ್ ಇದ್ದರೆ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಈ ವಿಧಾನಕ್ಕೆ ತುಂಬಾ ಮಿತಿಗಳಿವೆ ಎನ್ನುವುದು ಸ್ಪಷ್ಟ.

ಮೇಲೆ ವಿವರಿಸಿರುವ ವಿಧಾನಗಳು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಮೂಲದಿಂದ ಅಂಕಿ- ಅಂಶ ಸಂಗ್ರಹಣೆಗೆ ಸಂಬಂಧ ಪಟ್ಟವು ಆದರೆ ಈ ಮೊದಲೇ ತಿಳಿಸಿದಂತೆ, ಈ ವಿಧಾನಗಳಿಗೆ ಸಾಕಷ್ಟು ಸಮಯ, ಹಣ, ಮತ್ತು ಸಿಬ್ಬಂದಿ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಎಲ್ಲೆಲ್ಲಿ ಈಗಾಗಲೇ ಸಂಗ್ರಹಿಸಲಾಗಿರುವ ಮಾಹಿತಿಗಳು ಲಭ್ಯವಿದೆಯೋ ಅದನ್ನೇ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಗೆ ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ದ್ವಿತೀಯ ಮೂಲದ ಮಾಹಿತಿ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ದ್ವಿತೀಯ ಮೂಲದ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಕೇಂದ್ರ ಸರ್ಕಾರ, ರಾಜ್ಯ ಸರ್ಕಾರ, ಖಾಸಗಿಗೀ ಸಂಸ್ಥೆಗಳು, ಅಂತರ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯಮಟ್ಟದಲ್ಲಿನ ಪ್ರಕಟಣೆಗಳ ಮೂಲಕಪಡೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅಭಿವೃದ್ಧಿಹೊಂದಿರುವ ದೇಶಗಳಲ್ಲಿ, ಖಾಸಗೀ ಸಂಸ್ಥೆಗಳು ವಿವಿಧ ವಿಷಯಗಳ ಬಗೆಗಿನ ಅಂಕಿ -ಅಂಶಗಳನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿ ಮಾರಾಟ ಮಾಡುತ್ತವೆ. ನಮ್ಮ ದೇಶದಲ್ಲಿ ಇಂತಹ ಸಂಸ್ಥೆಗಳು ವಿರಳ. ಮುಂಬಯಿಯಲ್ಲಿರುವ "ಸೆಂಟರ್ ಫಾರ್ ಮಾನಿಟರಿಂಗ್ ಇಂಡಿಯನ್ ಎಕಾನಮಿ"(ಸಿ.ಎಂ.ಇ) ಭಾರತದ ಆರ್ಥಿಕತೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿ ಕ್ರಯಕ್ಕೆ ಮಾರಾಟ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ನಮ್ಮಲ್ಲಿ ಆನುಷಂಗಿಕ ಮೂಲದ ಅಂಕಿ - ಅಂಶ, ಸಂಗ್ರಹಣೆ ಇನ್ನೂ ಬಾಲ್ಯಾವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿಯೇ ಇದೆ ಎಂದು ಹೇಳಬೇಕು.

16.4 ಅಂಕಿ -ಅಂಶಗಳ ಪರಿಷ್ಕರಣೆ

ಯಾವುದೇ ಕ್ರಿಯೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳು,ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಒಂದು ಮುದ್ದೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ ಅಷ್ಟೆ. ಈ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳನ್ನು ನೋಡಿದರೆ ನಮಗೆ ಏನು ಅರ್ಥವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಇದರಿಂದ ಯುಕ್ತವಾದ ತೀರ್ಮಾನಗಳನ್ನು ಕೈಗೊಳ್ಳಬೇಕಾದರೆ, ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳನ್ನು

ಪರಿಷ್ಕರಿಸಬೇಕು. ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕ್ರಮಬದ್ಧವಾಗಿ ಜೋಡಿಸಬೇಕು. ಈ ಕ್ರಿಯೆಗೆ ಪರಿಷ್ಕರಣೆ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳನ್ನು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಮೂಲದಿಂದ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿರಲಿ, ಅಥವಾ ಆನುಷಂಗಿಕ ಮೂಲದಿಂದ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿರಲಿ ಅದನ್ನು ಮುಂದಿನ ಬಳಕೆಗಾಗಿ ಪರಿಷ್ಕರಿಸಲೇ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ವರ್ಗೀಕರಣ ಮಾಡುವುದು ಹೇಗೆ ?ಕೋಷ್ಟಕಗಳನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ.

16.5 ವರ್ಗೀಕರಣ

ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳ ವರ್ಗೀಕರಣದ ಮುಖ್ಯ ಉದ್ದೇಶಗಳೆಂದರೆ,

(i) ಒಂದು ದತ್ತದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳನ್ನು ಏಕ ರೂಪಕ್ಕೆ ತರುವುದು,

(ii) ವಿಶ್ವ ಮಾಹಿತಿಗೆ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕ್ರೋಢೀಕರಿಸುವುದು

(iii) ಅನಗತ್ಯ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಉಪಯುಕ್ತ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಉಳಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು.

(iv) ಸಂಗ್ರಹಿಸಿರುವ ಅಂಕಿ-ಅಂಶ ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರನಿಯಮಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯವಾಗುವಂತೆ ಮಾಡುವುದು.

ವರ್ಗೀಕರಣವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ನಾಲ್ಕು ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಆಧಾರಿಸಿ ಮಾಡಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅವುಗಳೆಂದರೆ;

(i) ಭೌಗೋಳಿಕ ಆಧಾರಿತ ವರ್ಗೀಕರಣ

(ii) ಸಮಯ ಆಧಾರಿತ ವರ್ಗೀಕರಣ

(iii) ಪರಿಮಾಣ ಆಧಾರಿತ ವರ್ಗೀಕರಣ

(iv) ಗುಣ ಆಧಾರಿತ ವರ್ಗೀಕರಣ

(i) ಭೌಗೋಳಿಕ ಆಧಾರಿತ ವರ್ಗೀಕರಣ: ಬೌಗೋಳಿಕ ಸ್ಥಿತಿಯನ್ನಾಧರಿಸಿ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳನ್ನು ವರ್ಗೀಕರಣ ಮಾಡಲಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ವಿವಿಧ ರಾಜ್ಯಗಳಲ್ಲಿನ ಜನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ವರ್ಗೀಕರಿಸಬಹುದು. ಹಾಗೆಯೇ ಒಂದು ರಾಜ್ಯದೊಳಗಿನ ವಿವಿಧ ತಾಲ್ಲೂಕುಗಳಲ್ಲಿ ಬಡತನದ ರೇಖೆಯಿಂದ ಎಷ್ಟುಜನ ಕೆಳಗಿದ್ದಾರೆ ಎನ್ನುವುದರ ವರ್ಗೀಕರಣ ಮಾಡಬಹುದು.

(ii) ಸಮಯ ಆಧಾರಿತ ವರ್ಗೀಕರಣ: ಋತುಮಾನವನ್ನನುಸರಿಸಿ, ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳನ್ನು ವರ್ಗೀಕರಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 10 ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಮಳೆಗಾಲದಲ್ಲಿ ಮಾರಾಟವಾಗಿರುವ ಕೊಡೆಗಳ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಬಹುದು. ಬೇಸಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಮಾರಾಟವಾಗುವ ವಿವಿಧ ಕಂಪನಿಗಳ ತಂಪು ಪಾನೀಯಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಬಹುದು ಇತ್ಯಾದಿ.

(iii) ಪರಿಮಾಣ ಆಧಾರಿತ ವರ್ಗೀಕರಣ: ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಿ ಮುಖ್ಯ ವರ್ಗೀಕರಣವೆಂದರೆ, ಅಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ವರ್ಗಾಂತರಗಳಾಗಿ ಮಾಡಿ, ಪ್ರತಿ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸೇರುತ್ತವೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಗುರುತು ಮಾಡಿ ಕ್ರಮಬದ್ಧವಾಗಿ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ತಯಾರಿಸುವುದು. ಈ ರೀತಿಯ ವರ್ಗೀಕರಣವನ್ನು ಮುಂದೆ ನಾವು ವಿವರವಾಗಿ ನೋಡುತ್ತೇವೆ. (iv) ಗುಣ ಆಧಾರಿತ ವರ್ಗೀಕರಣ: ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕೆಲವು ಗುಣ ಲಕ್ಷಣಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ವಿವಾಹಿತರೇ ಅವಿವಾಹಿತರೇ ಎನ್ನುವುದರ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ವರ್ಗೀಕರಣ ಮಾಡಬಹುದು. ಈ ರೀತಿಯ ಪಟ್ಟಿಗಳನ್ನು ಏಕವಿಧ, ದ್ವಿವಿಧ ಪಟ್ಟಿಗಳಾಗಿ ಸಹ ವರ್ಗೀಕರಿಸಬಹುದು.

ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಜನರ ವಯಸ್ಸು ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ	ಗಂಡು	ಹೆಣ್ಣು	ಒಟ್ಟು
40-50	40	60	100
50-60	25	40	65
60-70	30	20	50
70-80	10	5	15

ಇಲ್ಲಿ ಗಂಡು - ಹೆಣ್ಣು ಎರಡು ಗುಣಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ವರ್ಗೀಕರಣ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ.

ಅಂಕಿ ಸಂಖ್ಯಾ ಶ್ರೇಣಿಗಳು:

ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳನ್ನುಮೂರುವರ್ಗಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅವುಗಳೆಂದರೆ,

(i) ವ್ಯಕ್ತಿಗತವಾಗಿ ವೀಕ್ಷಿಸಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು(Individual observations)
(ii) ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಶ್ರೇಣಿಗಳು (Discrete series)
(iii) ಸತತ ಸಂಖ್ಯಾ ಶ್ರೇಣಿಗಳು (Continuous series)

(i) ಕೆಲವು ಕ್ರಿಯೆಗಳು ಕೆಲವು ಅಂಕಿ -ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಆ ಅಂಕಿ -ಅಂಶಗಳನ್ನು ನೇರವಾಗಿ ನೋಡಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಗುರುತುಮಾಡಿ ಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಇಂಥಹ ಅಂಕಿ - ಅಂಶಗಳ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ವೈಯಕ್ತಿಕವಾಗಿ ವೀಕ್ಷಿಸಿರುವ ಅಂಕಿ - ಅಂಶಗಳು ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 10 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಅಂಕಗಳು, 10 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿನಿಯರ ಎತ್ತರ, 20 ಮನೆಗಳಲ್ಲಿ ವಾಸಿಸುವವರ ಸಂಖ್ಯೆ ಇತ್ಯಾದಿ.

(ii) ಕೆಲವು ಅಂಕಿ ಅಂಶಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳತ್ತವೆ. ಉದಹರಣೆಗೆ ಒಂದು ಪಟ್ಟಣದಲ್ಲಿರುವ ಶಾಲೆಗಳು, ಆಸ್ಪತ್ರೆಗಳು ಇತ್ಯಾದಿ. ಇವು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಅಥವಾ ದಶಮಾಂಶಗಳನ್ನು ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳುವುದಿಲ್ಲ.

(iii) ಸತತ ಶ್ರೇಣಿಗಳು: ಅಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆ ಮಾಹಿತಿ, ಭಿನ್ನರಾಶಿ, ದಶಮಾಂಶಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಳ್ಳುವಂತಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಸತತ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿ ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಆದಾಯ, ವೆಚ್ಚ, ಲಾಭ, ದೈನಂದಿನ ಖರ್ಚು, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಎತ್ತರ ಇತ್ಯಾದಿ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಸತತ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ವರ್ಗಾಂತರ, ಆವರ್ತಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕೊಷ್ಟಕದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗುತ್ತದೆ.

16.7 ಕೋಷ್ಟಕ ತಯಾರಿಕೆ

ನಾವು ಈಗ ಕೊಡಲಾಗಿರುವ ಅಂಕಿ- ಅಂಶದಿಂದ ಕೊಷ್ಟಕವನ್ನು ಹೇಗೆ ತಯಾರು ಮಾಡಬೇಕು ಎನ್ನುವುದನ್ನು ನೋಡೋಣ:

ಕೆಳಗಿನ ಅಂಕಿ -ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 50 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ. ಇವನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ಒಂದು ಕೊಷ್ಟಕವನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡೋಣ:

ಅಂಕಗಳು

75	65	75	40	75
66	62	75	45	40
72	66	72	65	55
45	72	85	62	55
85	75	40	66	72
73	65	64	72	54
85	40	72	65	75
66	45	75	63	85
73	63	85	65	66
62	63	66	72	72

ಕೊಡಲಾಗಿರುವ ದತ್ತದಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆ40 ಮತ್ತು ಗರಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆ 15. ನಾವು 10ರ ವರ್ಗಾಂತರ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ತಯಾರುಮಾಡೋಣ.

ಅಂಕಗಳ ವರ್ಗಾಂತರ	ಪ್ರತಿ ಅಂಕದ ಮಾಹಿತಿ	ಆವರ್ತ (f)	ಸಂಚಿತ ಆವರ್ತ(c.f)
40-50	𝍸 ||	7	7
50-60	|||	3	10
60-70	𝍸 𝍸 ||||	18	28
70-80	𝍸 𝍸 𝍸 ||	17	45
80-90	𝍸	5	50

ಪ್ರತಿ ಆವರ್ತ (f) ಪ್ರತಿ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಸಂಚಿತ ಆವರ್ತ, ಪ್ರತಿ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಗಡೆ ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 60-70 ರ ಸಂಚಿತ ಆವರ್ತ 45. ಅಂದರೆ 45ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಅಂಕ 80ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬೇಕು. ಆವರ್ತವನ್ನು f(frequency)ಎಂಬ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ಮತ್ತು ಸಂಚಿತ ಆವರ್ತವನ್ನು C.f(cunulative frequency) ಎಂಬ ಚಿಹ್ನೆಗಳಿಂದ ಗುರುತಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. Σf - ಎನ್ನುವುದು, ಆವರ್ತದ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಅಥವಾ ದತ್ತದಲ್ಲಿರುವ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಆಧರಿಸಿ, ಅನೇಕ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ತತ್ವಗಳನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ನಾವು ಮುಂದೆ ನೋಡುತ್ತೇವೆ.

16.8 ಸಾರಾಂಶಿಸೋಣ:

ಈ ಘಟಕದಲ್ಲಿ ನೀವು ಅಂಕಿ-ಅಂಶವನ್ನು ಕಲೆ ಹಾಕುವ ಮೂಲಗಳಾದ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಹಾಗೂ ಆನುಷಂಗಿಕ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ್ದೀರಿ. ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಮೂಲಗಳ ಅಂಕಿ - ಅಂಶಗಳ ಸಂಗ್ರಹಣೆಗೆ ಅಗತ್ಯವಿರುವ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ, ಹಾಗೆಯೇ, ಪ್ರಶ್ನಾವಳಿಯ ತಯಾರಿಕೆ, ಷೆಡ್ಯೂಲ್‌ನ ಅಗತ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಅರಿತಿದ್ದೀರಿ. ಜೊತೆಗೆ ವರ್ಗೀಕರಣ ವಿಧಾನ, ಕೊಷ್ಟಕ ತಯಾರಿಕೆ, ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯ ವಿವಿಧ ಬಗೆಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯ ಮಾಡಿಕೊಂಡಿದ್ದೀರಿ. ಇವೆಲ್ಲವೂ ಸಹ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ಅಭ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಮೂಲ ಪರಿಕರಗಳು. ಇವುಗಳನ್ನು ಎಚ್ಚರಿಕೆಯಿಂದ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದರೆ ಮಾತ್ರ ಮುಂದಿನ ಘಟಕಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಸಾಧ್ಯ.

16.9 ಮುಖ್ಯ ಪರಿಭಾವನೆಗಳು

1. ಸಮೀಕ್ಷಾ ವಿಧಾನ
2. ಪ್ರಶ್ನಾವಳಿ
3. ಷೆಡ್ಯುಲ್
4. ಕೊಷ್ಟಕ
5. ವರ್ಗಾಂತರ
6. ಆವರ್ತಮತ್ತು ಸಂಚಿತ ಆವರ್ತ
7. ವೈಯಕ್ತಿಕವಾಗಿ ಗಮನಿಸಿರುವ ಅಥವಾ ವೀಕ್ಷಿಸಿರುವ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿ
8. ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಪಡೆಯುವ ಶ್ರೇಣಿ
9. ಸತತ ಸಂಖ್ಯಾ ಶ್ರೇಣಿ

16.10 ಸ್ವ- ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

1. ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯಾ ಮಾಹಿತಿ, 40 ಪುಸ್ತಕಗಳಲ್ಲಿರುವ ಪುಟಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಆಧರಿಸಿ, ವರ್ಗಾಂತರ. ಆವರ್ತ, ಮತ್ತು ಸಂಚಿತ ಆವರ್ತವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಿ.

140	40	120	140
150	60	100	150
130	95	115	110
125	100	125	55
110	25	55	60
90	35	45	40
120	40	90	80
110	45	100	85
50	50	115	60
60	60	70	75

2. ಅಂಕಿ -ಅಂಶಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸುವ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಿ.

3. ಆವರ್ತ ಎಂದರೇನು? ಒಂದು ಕಲ್ಪನಾತ್ಮಕ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಿ, ಆವರ್ತ ಮತ್ತು ಸಂಚಿತ ಆವರ್ತಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಿ.

16.11 ಮುಂದಿನ ಓದಿಗಾಗಿ

1. ಡಾ. ಸಿ.ಕೆ. ರೇಣುಕಾರ್ಯ : ಸಾಮಾಜಿಕ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ಅಧ್ಯಾಯ 2

2. ಡಾ. ಸಿ.ಕೆ. ರೇಣುಕಾರ್ಯ : ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಪರಿಮಾಣಾತ್ಮಕ ವಿಧಾನಗಳು

ಘಟಕ -17

ಅಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಕ್ಷಾ ನಿರೂಪಣೆ

17.1 ಪೀಠಿಕೆ

17.2 ನಕ್ಷಾ ನಿರೂಪಣೆಯ ಅನುಕೂಲಗಳು

17.3 ನಕ್ಷಾ ನಿರೂಪಣೆಯ ಮಿತಿಗಳು

17.4 ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ನಕ್ಷೆಗಳು

17.5 ನಿಮ್ಮ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ

17.6 ಸಾರಾಂಶಿಸೋಣ

17.7 ಮುಖ್ಯ ಪರಿಭಾವನೆಗಳು

17.8 ಸ್ವ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

17.9 ಮುಂದಿನ ಓದಿಗಾಗಿ

ಘಟಕ -17

ಅಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಕ್ಷಾ ನಿರೂಪಣೆ

17.1 ಪೀಠಿಕೆ:

ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಅಂಕಿ-ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಮೂಡಿಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಸಹ ಅನುಸರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ಅನುಕೂಲಗಳಿರುವುದರಿಂದ ಇದನ್ನು ವ್ಯಾಪಕವಾಗಿ ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

17.2 ನಕ್ಷಾ ನಿರೂಪಣೆಯ ಅನುಕೂಲಗಳು

ಅಂಕಿ-ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಮೂಡಿಸುವುದರಿಂದ ಅನೇಕ ಅನುಕೂಲಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳೆಂದರೆ

(i) ಅತ್ಯಂತ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಹ ಕ್ರೋಢೀಕರಿಸಿ, ಯುಕ್ತವಾದ ಘಟಕಗಳನ್ನು ಆಯ್ದುಕೊಂಡು ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಮೂಡಿಸಬಹುದು.

(ii) ಸಾಮಾನ್ಯರಿಗೂ ಸಹ ನಕ್ಷಾ ನಿರೂಪಣೆ ಅರ್ಥವಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಬೆಲೆ ಸೂಚ್ಯಾಂಕಗಳು ವರ್ಷದಿಂದ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಹೇಗೆ ಬದಲಾಗುತ್ತವೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಮೂಡಿಸಿದಾಗ, ಎಲ್ಲರಿಗೂ ಅದು ಸುಲಭವಾಗಿ ಗ್ರಾಹ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ.

(iii) ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮೂಡಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ತಂತ್ರಗಳ ನೆರವು ಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ.

(iv) ಅನೇಕ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಬಹಳ ಸುಲಭವಾಗಿ ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಮೂಡಿಸಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಹೋಲಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ವಿವಿಧ ರಾಜ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಕೈಗಾರಿಕಾ ಉತ್ಪಾದನೆ ಎಷ್ಟಿದೆ? ವಿವಿಧ ರಾಜ್ಯಗಳ ರಫ್ತು ಹೇಗಿದೆ? ಮುಂತಾದವನ್ನು ಒಂದೇ ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಮೂಡಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯ.

(v) ಒಂದು ಆರ್ಥಿಕ ಚಲ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ವರ್ತಿಸಿದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಮೂಡಿಸಿ, ಮುಂದಿನ ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಚಲ ಹೇಗೆ ಮುಂದುವರಿಯಬಹುದು ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಗ್ರಹಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯ.

17.3 ನಕ್ಷಾ ನಿರೂಪಣೆಯ ಮಿತಿಗಳು

ನಕ್ಷಾ ನಿರೂಪಣೆಗೆ ಮೇಲಿನ ಅನುಕೂಲಗಳಿದ್ದರೂ ಅದಕ್ಕೆ ಕೆಲವೊಂದು ಮಿತಿಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳೆಂದರೆ

(i) ನಕ್ಷಾ ನಿರೂಪಣೆ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಎರಡು ಚಲಗಳಿಗೆ ಸೀಮಿತವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾದ ಚಲಗಳ ನಿರೂಪಣೆ, ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಹೆಚ್ಚೆಂದರೆ ಮೂರು ಚಲಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯವಹರಿಸಬಹುದು ಅಷ್ಟೆ.

(ii) ನಕ್ಷಾ ನಿರೂಪಣೆ, ಯಾವುದೇ ಆರ್ಥಿಕ ಕ್ರಿಯೆಯ ಖಚಿತ ಸಂಖ್ಯಾ ನಿರೂಪಣೆಯನ್ನು ಮಾಡುವುದಿಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಂದು ಸರಕಿನ ಬೆಲೆ ಮತ್ತು ಬೇಡಿಕೆಗಳ ನಡುವಣ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಮೂಡಿಸಿ, ಈ ಚಲಗಳು ಪರಸ್ಪರ ವಿಪರ್ಯ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು. ಆದರೆ ಈ ವಿಪರ್ಯ ಸಂಬಂಧ ಎಷ್ಟು ಗಟ್ಟಿಯಾದದ್ದು ಎನ್ನುವುದನ್ನು ತೋರಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಆದರೆ 'ಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕ'ವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಇದನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು. ಮುಂದೆ ನೀವು ಇದಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚಿನ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೀರಿ.

(iii) ಅಂಕಿ-ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆ ವಿಪರೀತ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳಿರುವಾಗ ಸಹ, ನಕ್ಷಾ ನಿರೂಪಣೆಕಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ. ಚಲಗಳ ವರ್ತನೆಯ ಸ್ಪಷ್ಟ ಚಿತ್ರಣ ಇದರಿಂದ ದೊರೆಯುವುದಿಲ್ಲ.

ಮೇಲಿನ ಮಿತಿಗಳಿದ್ದರೂ, ಅವುಗಳ ಕೆಲವು ಉಪಯೋಗಗಳಿಂದಾಗಿ, ನಕ್ಷಾ ನಿರೂಪಣೆಯನ್ನು ಅನೇಕ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈಗಿನ ಕಂಪ್ಯೂಟರ್‌ಗಳಂತೂ ಅಂಕಿ-ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಕ್ಷಾ ನಿರೂಪಣೆಯನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಮಾಡುತ್ತವೆ.

ಈಗ ನಾವು ಕೆಲವು ಮುಖ್ಯ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

17.4 ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ನಕ್ಷೆಗಳು

ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಬಳಸಲಾಗುವ ನಕ್ಷೆಗಳೆಂದರೆ,

(i) ದಂಡ ನಕ್ಷೆ(Bar diagrams)

(ii) ಆವರ್ತಅಥವಾ ಕೋನ ನಕ್ಷೆ(Pie or angular diagrams)

(iii) ಆವರ್ತ ಸಂಖ್ಯಾನಕ್ಷೆ(histograms)

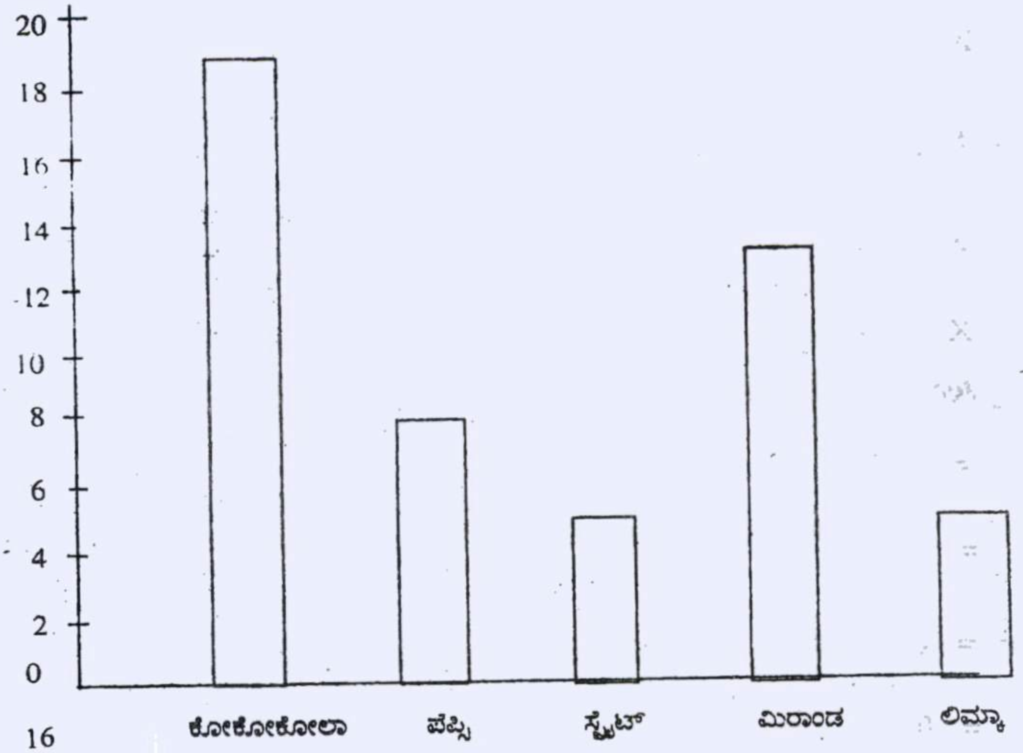
(iv) ಆವರ್ತ ವಿತರಣ ಬಹು ಭುಜ ನಕ್ಷೆ(Frequency polygon)

(v) ಸಂಚಿತ ಆವರ್ತರೇಖೆ(Ogive)

(i) ದಂಡ ನಕ್ಷೆ:

ದಂಡ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಚಲಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಆವರ್ತವನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಮೂಡಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. 50 ಜನರು ವಿವಿಧ ಪಾನೀಯಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಕೆಳಗೆ ದಂಡ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ. OX- ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಪಾನೀಯವನ್ನು ಮತ್ತು OY- ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಆವರ್ತವನ್ನು ಗುರುತಿಸಲಾಗಿದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಅಂಕಿ-ಅಂಶದ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಈ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಪಾನೀಯ	ಪಾನೀಯ ಸೇವಿಸುವ ಜನರ ಸಂಖ್ಯೆ (f)
ಕೋಕೋಕೋಲಾ	19
ಪೆಪ್ಸಿ	8
ಸ್ಪ್ರೈಟ್	5
ಮಿರಾಂಡ	13
ಲಿಮ್ಕಾ	5
	$\sum f = 50$



16

ಮೇಲಿನದು ದಂಡ ಚಿತ್ರ ಇದರಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಎಷ್ಟೆಷ್ಟು ಜನರು ಯಾವ ಪಾನೀಯವನ್ನು ಇಷ್ಟಪಡುತ್ತಾರೆ ಎನ್ನುವುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

(ii) ಕೋನ ನಕ್ಷೆ:

ಮೇಲಿನ ಅಂಕಿ- ಅಂಶಗಳನ್ನು ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಮೂಲಕವೂ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯ. ಇದನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿರುವ ಅಂಕಿ - ಅಂಶವನ್ನು ಶೇಕಡಾಂಶ ಆವರ್ತವಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ ರಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗಿನ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಪಾನೀಯ	ಆವರ್ತ	ಸಾಪೇಕ್ಷ ಆವರ್ತ	ಶೇಕಡಾಂಶ ಆವರ್ತ
ಕೋಕೋಕೋಲಾ	19	0.38	38
ಪೆಪ್ಸಿ	8	0.16	16
ಸ್ಪ್ರೈಟ್	5	0.10	10
ಮಿರಾಂಡ	13	0.26	26
ಲಿಮ್ಕಾ	5	0.10	10
	$\Sigma f = 50$	1.00	100

ಶೇಕಡಾಂಶ ಆವರ್ತವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಪಡೆಯಲಾಗಿದೆ.

$$\frac{19}{50} \times 100 = 38$$

$$\frac{8}{50} \times 100 = 16$$

$$\frac{5}{50} \times 100 = 10$$

$$\frac{13}{50} \times 100 = 26$$

$$\frac{5}{50} \times 100 = 10$$

ಸಾಪೇಕ್ಷ ಆವರ್ತವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಪಡೆಯಲಾಗಿದೆ.

$$\frac{38}{50} = 0.38$$

$$\frac{16}{50} = 0.16$$

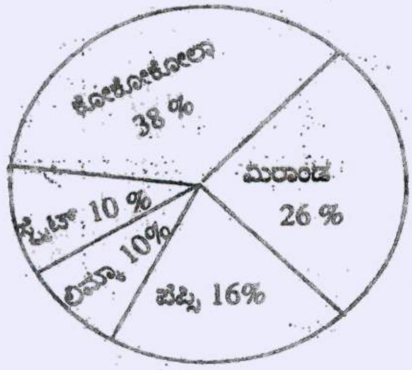
$$\frac{10}{50} = 0.10$$

$$\frac{26}{50} = 0.26$$

$$\frac{10}{50} = 0.10$$

ಕೋನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಶೇಕಡಾಂಶ ಆವರ್ತವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಪಡೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.
ಕೆಳಗಿನ ನಕ್ಷೆ ಇದನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತದೆ.

ವೃತ್ತ ನಕ್ಷೆ



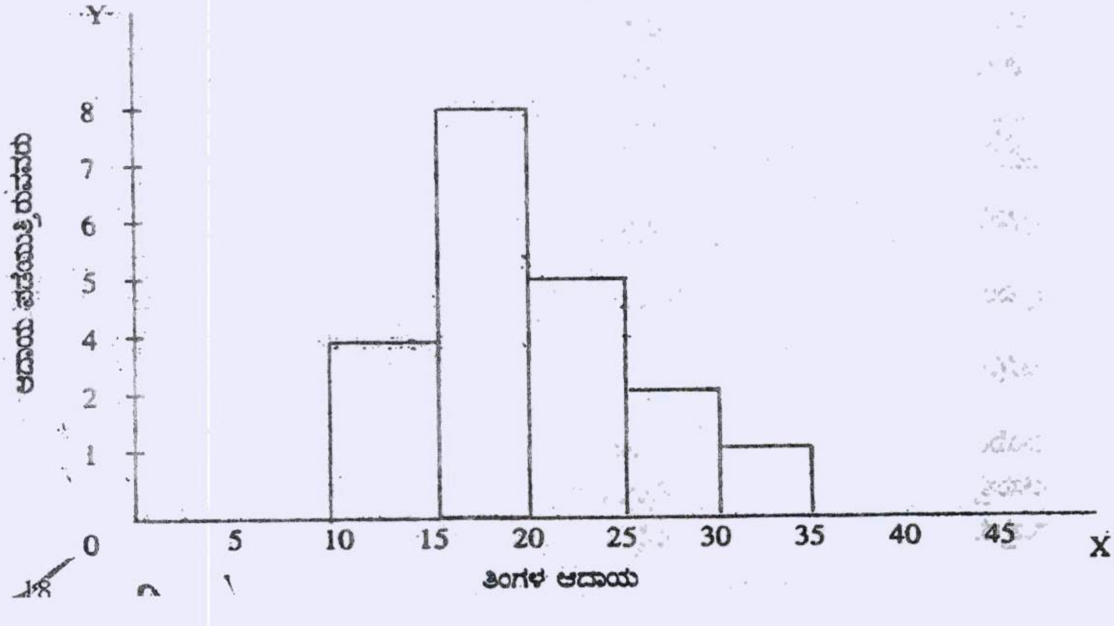
ವೃತ್ತನಕ್ಷೆಯಿಂದ ಸುಲಭವಾಗಿ ಶೇಕಡಾ ಎಷ್ಟು ಜನರು ವಿವಿಧ ಪಾನೀಯಗಳನ್ನು ಕೊಳ್ಳುತ್ತಾರೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಗ್ರಹಿಸಬಹುದು.

(iii) ಆವರ್ತ ಸಂಖ್ಯಾ ಚಿತ್ರ(Histogram)

ಆವರ್ತ ಸಂಖ್ಯಾ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಚಲನನ್ನು OX - ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ವರ್ಗಾಂತರಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಆವರ್ತವನ್ನು Y- ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ನಮೂದಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. 20 ಜನರ ತಿಂಗಳ ವೇತನಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯಾಮಾಹಿತಿ ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಆವರ್ತ ಸಂಖ್ಯಾ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ತಿಂಗಳ ಆದಾಯ (000ರೂನಲ್ಲಿ)	ಆದಾಯ ಪಡೆಯುತ್ತಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ
10-15	4
15-20	8
20-25	5
25-30	2
30-35	1
	$\sum f = 20$

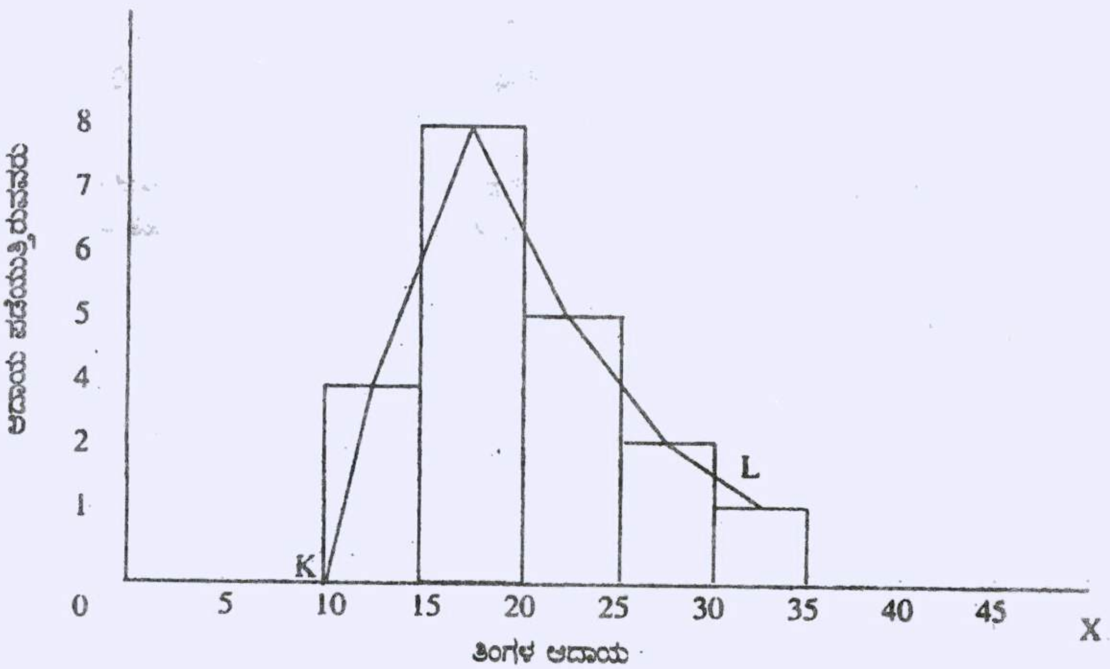
ಆವರ್ತ ಸಂಖ್ಯಾಚಿತ್ರ



ಆವರ್ತ ಸಂಖ್ಯಾಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ OX- ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ 9.5, 14.5, 19.5, 24.5, 29.5, 34.5 ಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಲಾಗಿದೆ. OY- ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಆದಾಯ ಪಡೆಯುವವರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಲಾಗಿದೆ. ದಂಡಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಸೇರಿಸಲಾಗಿದೆ. ದಂಡನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಇವು ಬಿಡಿಸಿ ಕೊಂಡಿರುತ್ತವೆ.

(iv) ಆವರ್ತ ವಿತರಣ ಬಹುಭುಜ (Frequency Polygon)

ಆವರ್ತ ಸಂಖ್ಯಾಚಿತ್ರದ ಚತುರ್ಭುಜಗಳಲ್ಲಿನ ಮಧ್ಯದ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಒಂದು ರೇಖಾ ಚಿತ್ರದ ಮೂಲಕ ಸೇರಿಸಿದಾಗ ದೊರೆಯುವ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಆವರ್ತ ಚತುರ್ಭುಜವೆಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರವನ್ನೇ ಆಧರಿಸಿ ಆವರ್ತ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಬಿಡಿಸಲಾಗಿದೆ.



ಆವರ್ತ ಸಂಖ್ಯಾ ಚಿತ್ರಗಳ ದಂಡ ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿನ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಬರುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ಆವರ್ತವಿತರಣ ಬಹುಭುಜ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ KL ರೇಖೆ ಆವರ್ತ ವಿತರಣ ಬಹುಭುಜ.

17.5 ನಿಮ್ಮ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ

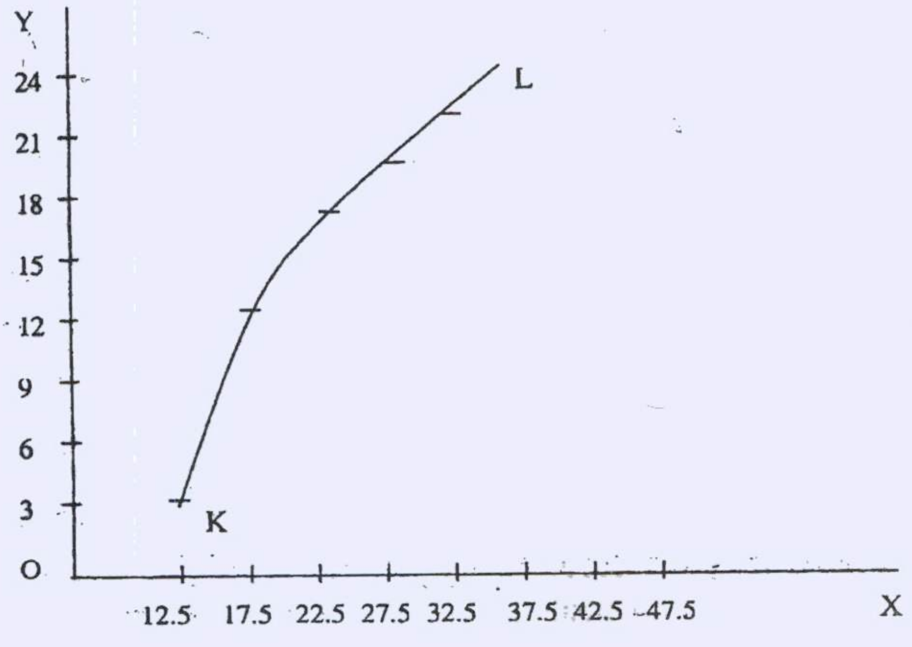
1. ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ನಕ್ಷಾ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸುವುದರ ಅನುಕೂಲ ಮತ್ತು ಅನಾನುಕೂಲಗಳನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಿ.

2. ಕೋನ ನಕ್ಷೆ ಎಂದರೇನು? ಅದರಿಂದ ಏನು ಪ್ರಯೋಜನ?

ಸಂಚಿತ ಆವರ್ತ ರೇಖೆ (ogive)

ಈ ಹಿಂದೆಯೇ ನಾವು ನೋಡಿರುವಂತೆ ಸಂಚಯ ಆವರ್ತಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಗೆ ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಸಂಚಿತ ಆವರ್ತವನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಮೂಡಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ಸಂಚಿತ ಆವರ್ತರೇಖೆ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ನಮ್ಮ ಹಿಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನೇ ಆಧಾರಿಸಿ ಸಂಚಿತ ಆವರ್ತ ರೇಖೆಯನ್ನು ರಚಿಸೋಣ.

ತಿಂಗಳ ಆದಾಯ X	ಆದಾಯ ಪಡೆಯುತ್ತಿರುವವರ ಸಂಖ್ಯೆ f	ಸಂಚಿತ ಆವರ್ತ C.f
10 - 15	4	4
15 - 20	8	12
20 - 25	5	17
25 - 30	2	19
30 - 35	1	20
$\sum f = 20$		



OX - ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮಧ್ಯದ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಮತ್ತು

OY- ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಸಂಚಿತ ಆವರ್ತವನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ.

KL- ರೇಖೆಯನ್ನು ,ಸಂಚಿತ ಆವರ್ತ ರೇಖೆ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಮೇಲೆ ನಾವು 5ರೀತಿಯ ನಕ್ಷಾ ವಿಧಾನವನ್ನು ವಿವರಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಇವು ಸಂಖ್ಯಾ ಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಪಕವಾಗಿ ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿವೆ. ಇದನ್ನು ನಾವು ಮುಂದೆ ಗ್ರಹಿಸುತ್ತೇವೆ.

17.6 ಸಾರಾಂಶಿಸೋಣ

ಈ ಘಟಕದಲ್ಲಿ ನಾವು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ನಕ್ಷಾ ನಿರೂಪಣೆಯ ಮಹತ್ವವನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸಮಾಡಿದ್ದೇವೆ. ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ತತ್ವಗಳಿಗೆ, ನಕ್ಷಾನಿರೂಪಣೆ ಪೂರಕ. ಇದರಿಂದ ಅಂಕಿ-ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಹಳ ಸುಲಭವಾಗಿ ಗ್ರಹಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ.

ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಬಳಕೆಯಾಗುವ ಅತಿಮುಖ್ಯ ನಕ್ಷೆಗಳೆಂದರೆ, ದಂಡ ಚಿತ್ರಗಳು, ವೃತ್ತ ಅಥವಾ ಕೋನ ಚಿತ್ರಗಳು, ಆವರ್ತ ಸಂಖ್ಯಾ ಚಿತ್ರ, ಆವರ್ತ ವಿತರಣಬಹುಭುಜ ಚಿತ್ರ ಮತ್ತು ಸಂಚಿತ ಆವರ್ತ ರೇಖೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ರಚಿಸಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ಸಹ ನಾವು ಕಲಿತುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ನಕ್ಷಾ ನಿರೂಪಣೆ ಬಹಳ ಅಪೇಕ್ಷಣೀಯವಾದರೂ, ಅದಕ್ಕೆ ಕೆಲವು ಮಿತಿಗಳಿವೆ. 2ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಚಲಗಳಿರುವಾಗ ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯಾವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ ಬಹಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳಿರುವಾಗ ನಕ್ಷಾ ನಿರೂಪಣೆಗೆ ಅಷ್ಟು ಅರ್ಥವಿರುವುದಿಲ್ಲ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು.

17.7 ಮುಖ್ಯ ಪರಿಭಾವನೆಗಳು

1. ನಕ್ಷಾ ನಿರೂಪಣೆ
2. ಶೇಕಡಾಂಶ ಆವರ್ತ
3. ದಂಡ ಚಿತ್ರಗಳು
4. ಕೋನ ಚಿತ್ರಗಳು
5. ಆವರ್ತ ಸಂಖ್ಯಾಚಿತ್ರ
6. ಆವರ್ತ ವಿತರಣ ಬಹುಭುಜ ಚಿತ್ರ
7. ಸಂಚಿತ ಆವರ್ತರೇಖೆ

17.8 ಸ್ವ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

1. ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಬಳಕೆಯಾಗುವ ಮುಖ್ಯ ನಕ್ಷೆಗಳು ಯಾವುವು?
2. ಕೆಳಗಿನ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿ, ಆವರ್ತ ಸಂಖ್ಯಾ ಚಿತ್ರ ಮತ್ತು ಆವರ್ತ ವಿತರಣ ಬಹುಭುಜ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ.

ಜನರ ವಯಸ್ಸು	ಜನರ ಸಂಖ್ಯೆ
25-35	140
35-45	100
45-55	60
55-65	50
65-75	25
75-85	5
	$\Sigma f = 380$

ಮುಂದಿನ ಓದಿಗಾಗಿ

1. ಡಾ. ಸಿ.ಕೆ. ರೇಣುಕಾರ್ಯ: ಸಾಮಾಜಿಕ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ಅಧ್ಯಾಯ -3
2. ಡಾ. ಸಿ.ಕೆ. ರೇಣುಕಾರ್ಯ: ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಪರಿಮಾಣಾತ್ಮಕ ವಿಧಾನಗಳು ಅಧ್ಯಾಯ -೮

ಘಟಕ -18
ಕೇಂದ್ರೀಯ ಮಾಪನಗಳು

18.1 ಪೀಠಿಕೆ

18.2 ವಿವಿಧ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಮಾಪನಗಳು

18.3 ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ

18.4 ತೂಕ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ

18.5 ನಿಮ್ಮ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ

18.6 ಸಂಯುಕ್ತ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ

18.7 ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯ ಅನುಕೂಲಗಳು

18.8 ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯ ಅನಾನುಕೂಲಗಳು

18.9 ಸಾರಾಂಶಿಸೋಣ

18.10 ಸ್ವ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

18.11 ಮುಖ್ಯ ಪರಿಭಾವನೆಗಳು

18.12 ಮುಂದಿನ ಓದಿಗಾಗಿ

18.1 ಪೀಠಿಕೆ:

ಕೇಂದ್ರೀಯ ಮಾಪನಗಳು ಕೊಡಲಾಗಿರುವ ಒಂದು ದತ್ತದ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುತ್ತವೆ. ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಸರಾಸರಿ ತುಂಬಾ ಮಹತ್ವದ ಪಾತ್ರವನ್ನು ವಹಿಸುತ್ತದೆ. ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯಾ ಮೊತ್ತದಲ್ಲಿ, ಸರಾಸರಿ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದು ಆ ಸಂಖ್ಯಾ ಮಾಹಿತಿಯ ಲಕ್ಷಣವನ್ನು ಅರಿಯುವುದಕ್ಕೆ ಅತ್ಯಾವಶ್ಯಕ ಎಂಬುದನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಹೇಳಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ. ನಿಮಗೆ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯ ಪರಿಚಯ ಇದ್ದೇ ಇದೆ. ಮತ್ತೆ ನೆನಪು ಮಾಡಬೇಕಾದರೆ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿದ್ದರೆ, ಉದಾಹರಣೆಗೆ 3, 4, 5 ಇದರ ಸರಾಸರಿ $3 + 4 + 5 = 12/3 = 4$ ಇದರಂತೆಯೇ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಸರಸರಿಗಳನ್ನು ಅಬಿವೃದ್ಧಿಗೊಳಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳೆಲ್ಲವೂ ಒಂದೊಂದು ರೀತಿಯ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಕ್ಕಾಗಿ ಅತ್ಯಗತ್ಯ. ಈ ಘಟಕದಲ್ಲಿ ನಾವು ಅತಿ ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಪರಿಚಯ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಮೊದಲಿಗೆ ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ಅಂಶವೆಂದರೆ, ನಾವು ಇನ್ನು ಮುಂದೆ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡುವಾಗ ಮೂರುರೀತಿಯ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಗಳಿಗೂ ಅಂದರೆ, ವೈಯಕ್ತಿಕವಾಗಿ ಗಮನಿಸಿರುವ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳು(Individual observations), ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಶ್ರೇಣಿಗಳು, (Discrete Series)ಮತ್ತು ಸತತ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಗಳು (Continuous Series) ಅನ್ವಯವಾಗುವಂತೆ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಮೂರು ರೀತಿಯ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಗಳ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಕಲಿತುಕೊಳ್ಳುವುದು ಅತ್ಯಗತ್ಯ. ಪ್ರತಿ ಘಟಕದ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ, ಆಘಟಕದಲ್ಲಿ ಬಳಸಲಾಗಿರುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು ನೀಡಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅದನ್ನು ಎಚ್ಚರಿಕೆಯಿಂದ ಗಮನಿಸಬೇಕಾದುದು ಅತ್ಯಗತ್ಯ

18.2 ವಿವಿಧ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಮಾಪಕಗಳು

ಆರು ಮುಖ್ಯವಾದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಮಾಪಕಗಳನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸಬೇಕು. ಅವುಗಳೆಂದರೆ;

(1) ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ (Arithmetic Mean).

(2) ತೂಕ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ (Weight Arithmetic Mean)

(3) ಮಧ್ಯಕ (Median)

(4) ಬಹುಳಕ (Mode)

(5) ಹಾರ್ಮೋನಿಕ್ ಸರಾಸರಿ (Harmonic Mean)

(6) ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಸರಾಸರಿ (Geometric Mean)

ಈ ಘಟಕದಲ್ಲಿ ನಾವು ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು ತೂಕ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಪರಿಚಯ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

18.3 ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ

ಸೂತ್ರ: $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ ಗಳು ಗಮನಿಸಲಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ, ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸೂತ್ರೀಕರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_n}{N}$$

ಇಲ್ಲಿ $\overline{X}$ = ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ

N = ಗಮನಿಸಲಾಗಿರುವ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರವನ್ನು ನೋಡೋಣ;

(1) ವೈಯಕ್ತಿಕವಾಗಿ ಗಮನಿಸಲಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಗೆ ಅಂಕಗಣಿತದ ಸರಾಸರಿ

ಕೆಳಗೆ ಕಂಪನಿಗಳ ಆದಾಯವನ್ನು ಗುರುತು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಕಂಪನಿಗಳು	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
ಲಾಭ (ಲಕ್ಷ ರೂಗಳಲ್ಲಿ)	15	15	20	60	70	40	60	20	30	40

ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ $\overline{X} = \frac{\Sigma x i}{N}$

$$\overline{X} = \frac{15 + 15 + 20 + 60 + 70 + 40 + 60 + 20 + 30 + 40}{N}$$

$$= \frac{370}{10} = \text{ರೂ. } 37 \text{ ಲಕ್ಷ}$$

(1) ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಪಡೆಯುವ ಶ್ರೇಣಿಗಳು

ಈ ಶ್ರೇಣಿಗೆ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಸೂತ್ರ

$$\overline{X} = \frac{\Sigma f x}{N}$$

ಆದರೆ , ಚಲಗಳ ಅಂತರ ಒಂದೇ ಇರುವಾಗ ಕೆಳಗಿನ ಹ್ರಸ್ವಮಾರ್ಗವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

$$\overline{X} = a + \frac{\Sigma f d x}{\Sigma f}$$

ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಪ್ರತಿ ಕುಟುಂಬದಲ್ಲಿರುವ ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆ f	ಕುಟುಂಬಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ f	f . x
0	96	0
1	108	108
2	154	308
3	126	378
4	95	380
5	62	310
6	45	270
7	20	140
8	11	88
9	6	54
10	5	50
11	5	55
12	1	12
13	1	13
	$\Sigma f = 735$	$\Sigma fx = 2166$

$$\overline{X} = \frac{\Sigma f x}{\Sigma f}$$

$$\overline{X} = \frac{2166}{735} = 3$$

ಹ್ರಸ್ವ ಮಾರ್ಗ

ಹ್ರಸ್ವ ಮಾರ್ಗದಲ್ಲಿ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಷೂನ ಸೈಜ್ x	ಮಾರಾವಾಗಿರುವ ಜೊತೆಗಳು f	ಸರಾಸರಿ 8 ರಿಂದ ಇರುವ ದೂರ d x (x - a)	f . d x
4	1	-4	-4
5	2	-3	-6
6	4	-2	-8
7	5	-1	-5
$\boxed{a = 8}$	15	0	0
19	30	1	30
10	60	2	120
	$\Sigma f = 117$		127

$$\overline{X} = a + \frac{\Sigma f d x}{\Sigma f}$$

$$\overline{X} = 8 + \frac{127}{117} = 8 + 1.08 = 9.08$$

ಸರಾಸರಿ ಷೂನ ಸೈಜ್ = 9

<u>ಸತತ ಸಂಖ್ಯಾ ಶ್ರೇಣಿಗೆ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ</u>

$$\overline{X} = \frac{\Sigma f x}{\Sigma f}$$ <u>ಸೂತ್ರದಿಂದ</u>

ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ವರ್ಗಾಂತರ ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ ಹ್ರಸ್ವಮಾರ್ಗವನ್ನನುಸರಿಸಿ ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರದಿಂದ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು

$$\overline{X} = a + \frac{\Sigma f d^1 x}{\Sigma f} \times i$$

ಇಲ್ಲಿ $\overline{X}$ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ, a = ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗುವ ಸರಾಸರಿ, $\Sigma f d^1 x$ = $d^1 x$ ಮತ್ತು f ನ ಗುಣಲಬ್ಧ, i = ವರ್ಗಾಂತರ

ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ

ಲಾಭ (ರೂ.ನಲ್ಲಿ)	ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು x	f	X_L-900 dx	$d^1 x$	$fd^1 x$
200-400	300	500	-600	-3	-1,500
400-600	500	300	-400	-2	-600
600-800	700	280	-200	-1	-280
800-1000	$\boxed{a = 900}$	120	0	0	0
1,000-1,200	1,100	100	200	1	100
1,200-1,400	1,300	80	400	2	160
1,400-1,600	1,500	20	600	3	60
		$\Sigma f = 1{,}400$			$\Sigma f d^1 x = -2{,}060$

$$\overline{X} = a + \frac{\Sigma f d^1 x}{\Sigma f} \times i = 900 - \frac{2{,}060}{1{,}400} \times 200 = 900 - 294.29$$

= Rs 605.71

ಮತ್ತೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ

ಕೆಳಗಿನ ಮಾಹಿತಿಗೆ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ

ಮಾಸಿಕ ವೇತನ (ರೂ ನಲ್ಲಿ) ವರ್ಗಾಂತರ	ಕಾರ್ಮಿಕರ ಸಂಖ್ಯೆ f
500-600	30
600-700	127
700-800	140
800-900	240
900-1,000	176
1,000-1100	135
1,100-1200	20
	$\Sigma f = 868$

ಮಧ್ಯಬಿಂದು (x)	f	dx (x - a)	d^1x	fd^1x
550	30	-300	-3	-90
650	127	-200	-2	-254
750	140	-100	-1	-140
$\boxed{a = 850}$	240	0	0	0
950	176	100	1	176
1050	135	200	2	270
1150	20	300	3	60
	$\Sigma f = 868$			$\Sigma f d^1x = 22$

d^1x = ಇಲ್ಲಿ i ವರ್ಗಾಂತರ

$$\overline{X} = a + \frac{\Sigma f d^1 x}{\Sigma f} \times i$$

$$\overline{X} = 850 + \frac{22}{868} \times 100$$

$$\overline{X} = 850 + 2.53$$

$$\overline{X} = 852.53$$

ಸರಾಸರಿ ವೇತನ = ರೂ. 852.53

ತೂಕ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಂಕಗಣಿತದ ಸರಾಸರಿ (Weighted Arithmetic Mean)

ಅನೇಕ ಆರ್ಥಿಕ ಕ್ರಿಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಳಭೇದಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಒಂದು ಕೈಗಾರಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ರೀತಿಯ ಕಾರ್ಮಿಕರಿರುತ್ತಾರೆ. ಕುಶಲ ಕಾರ್ಮಿಕರು , ಅರೆ ಕುಶಲಕಾರ್ಮಿಕರು, ಸಾಧಾರಣ ಕಾರ್ಮಿಕರು ಇತ್ಯಾದಿ. ಈಗ ಕೈಗಾರಿಕೆಯಲ್ಲಿನ ಉದ್ಯೋಗಸ್ಥರ ಸರಾಸರಿ ಆದಾಯವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬೇಕಾದರೆ ಇವರೆಲ್ಲರನ್ನು ಒಂದೇ ಗುಂಪೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ, ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿದರೆ, ಅದು ಅಷ್ಟು ಅರ್ಥಪೂರ್ಣವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರತಿವರ್ಗದವರಿಗೆ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ತೂಕವನ್ನು ಕೊಟ್ಟು ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದು ಹೆಚ್ಚು ಅರ್ಥಪೂರ್ಣವಾದ ಸರಾಸರಿಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಇದಕ್ಕಾಗಿ ನೇರವಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಸೂತ್ರ

$$\overline{X}_w = \frac{\Sigma X.W}{\Sigma W}$$ ಆಗಿದ್ದರೆ,

ಹ್ರಸ್ವ ಮಾರ್ಗದ ಸೂತ್ರ

$$\overline{X}_w = a + \frac{\Sigma\ d\ x.w}{\Sigma W}$$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಇಲ್ಲಿ $\overline{X}_w$ = ತೂಕ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ

a = ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗುವ ಸರಾಸರಿ

$\Sigma\ d\ x$ = ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗಿರುವ ಸರಾಸರಿಯಿಂದ x ನ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳ ಮೊತ್ತ

ΣW = ತೂಕದ ಮೊತ್ತ

ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಕೆಳಗಿನ ನ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು ತೂಕ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕೋಣ

ಹುದ್ದೆ	ತಿಂಗಳ ಸಂಬಳ (ರೂನಲ್ಲಿ) x	ಉದ್ಯೋಗಸ್ಥರ ಸಂಖ್ಯೆ w	x . w
ಸೀನಿಯರ್ ಇಂಜಿನಿಯರ್	15000	10	150000
ಜ್ಯೂನಿಯರ್ ಇಂಜಿನಿಯರ್	8000	20	160000
ಡ್ರಾಫ್ಟ್‌ಮನ್	5000	70	350000
ಗುಮಾಸ್ತರು	2500	100	250000
ಡಿ ಗುಂಪಿನ ನೌಕರರು	1000	150	150000
N = 5	$\Sigma x = 31500$	$\Sigma w = 350$	1060000

ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ $= \frac{\Sigma x}{N} = \frac{31500}{5}$ = ರೂ 6300

ತೂಕಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ $= \frac{\Sigma X.W}{\Sigma W} = \frac{1060000}{350} = 3028.57$

ಹ್ರಸ್ವ ಮಾರ್ಗ

ಮೇಲಿನ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಹ್ರಸ್ವಮಾರ್ಗದಲ್ಲಿ ಮಾಡೋಣ

x	w	dx (x - 5000)	dx w
15,000	10	10,000	1,00,000
8,000	20	3,000	60,000
5,000	70	0	0
2,500	100	-2,500	-2,50,000
1,000	150	-4,000	-6,00,000
N = 5	Σ w = 350	Σ dx = 6500	-6,90,000

ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ $\overline{X} = a + \frac{\Sigma x}{N}$

$$\overline{X} = \frac{31500}{5} = 6300 \text{ ರೂ}$$

ತೂಕಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ

$$\overline{X} = a + \frac{\Sigma dx.w}{\Sigma w}$$

$$= 5000 + \frac{690000}{350}$$

$= 6971$ ರೂ

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ನಾವು ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ಅಂಶವೆಂದರೆ, ತೂಕ ಕೊಡದೆ ನೇರವಾಗಿ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ನಾವು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿದರೆ, ಆ ಸರಾಸರಿಯಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಿರುತ್ತದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಕಾರಣ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ ಎಲ್ಲ ವರ್ಗದ ನೌಕರರನ್ನು ಸಮಾನವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸುವುದು. ಆದರೆ ತೂಕ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸರಾಸರಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಂಪಿಗೆ ಯುಕ್ತ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಕೊಡಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ತೂಕ ನೌಕರ ವರ್ಗವಾಗಬಹುದು ಅಥವಾ ಒಂದು ಗಣತೀಯ ಸೂತ್ರದ ಮೂಲಕ ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗುವ ತೂಕವಾಗಬಹುದು. ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ವಿವಿಧ ಸಂಖ್ಯಾಸೂಚಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವಾಗ ತೂಕ ತುಂಬಾ ಮಹತ್ವವನ್ನು ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.

ನಿಮ್ಮ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ

ಕೇಂದ್ರೀಯ ಮಾಪನ ಎಂದರೇನು ? ವಿವಿಧ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಮಾಪನಗಳು ಯಾವುವು ?

2. ಕೆಳಗಿನ ನ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಹ್ರಸ್ವ ಮಾರ್ಗದಿಂದ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿ

ವರ್ಗಾಂತರ :	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
ಆವರ್ತ :	15	25	40	10	10

18.6 ಸಂಯುಕ್ತ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ (Combined Arthmetic Mean)

ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚಿನ ನ್ಯಾಸಗಳಿಗೆ, ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಅಳವಡಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಸಂಯುಕ್ತ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ $$\frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2 + n_3\bar{x}_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots n_n\bar{x}_n}{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots\ldots n_n}$$

ಇಲ್ಲಿ $n_1, n_2 \ldots n_n x_n$ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ಯಾಸಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. $\bar{X}_1, \bar{X}_2 \ldots\ldots\ldots\ldots + \bar{X}_n$ ಕ್ರಮವಾಗಿ $x_1\ x_2 \ldots x_n$ ನ್ಯಾಸಗಳ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ವ್ಯಕ್ತ ಪಡಿಸುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಒಂದು ಕಂಪನಿ ಎರಡು ಸ್ಥಳಗಳಲ್ಲಿ ತನ್ನ ವ್ಯವಹಾರವನ್ನು ನಡೆಸುತ್ತಿದೆ. ಮೊದಲನೆಯಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ 50 ಉದ್ಯೋಗಿಗಳಿದ್ದಾರೆ. ಎರಡನೆಯದರಲ್ಲಿ 100 ಉದ್ಯೋಗಿಗಳಿದ್ದಾರೆ. ಇವೆರಡೂ ಕಂಪನಿಗಳಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿನಿಧಿಗಳ ಸರಾಸರಿ ವೇತನ ಕ್ರಮವಾಗಿ ರೂ 1500 ಮತ್ತು ರೂ 1000 ಆಗಿದ್ದರೆ, ಇವೆರಡೂ ಕಂಪನಿಗಳ ಸಂಯುಕ್ತ ಸರಾಸರಿ ವೇತನವೆಷ್ಟು?

	ಕಂಪನಿ-1	ಕಂಪನಿ -2
ಉದ್ಯೋಗಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	$50(N_1)$	$100\ (N_2)$
ಉದ್ಯೋಗಿಗಳ ಸರಾಸರಿ ವೇತನ (ರೂ.ನಲ್ಲಿ)	$1500\ \bar{X}_1$	$1500\ \bar{X}_2$

ಸಂಯುಕ್ತ ಸರಾಸರಿ $= \dfrac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{N_1+N_2}$

$$= \frac{50 \times 1500 + 100 \times 1000}{50 + 100}$$

$$= \frac{7500+100000}{150}$$

$$= \frac{175000}{150}$$

ಸಂಯುಕ್ತ ಸರಾಸರಿ = ರೂ. 1166

18.7 ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯ ಅನುಕೂಲಗಳು

ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ, ಸರಾಸರಿಗಳ ಗುಂಪಿನಲ್ಲೇ ಅತ್ಯಂತ ಮಹತ್ವದ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಪಡೆದಿದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಅದಕ್ಕಿರುವ ಗಣೀತೀಯ ಅನುಕೂಲಗಳೇ ಮುಖ್ಯಕಾರಣ. ಈ ಅನುಕೂಲಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಮುಖ್ಯವಾದುವನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ;

(1) ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಕ್ರಮಬದ್ಧವಾಗಿ ಸೂತ್ರೀಕರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಗಣೀತೀಯ ಸಮೀಕರಣ, ತುಂಬಾ ಕರಾರು ವಾಕ್ಕಾಗಿದೆ.

(2) ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ ಕೊಡಲಾಗಿರುವ ಎಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರ ಲೆಕ್ಕಚಾರದಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡುವುದಿಲ್ಲ.

(3) ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರಲೆಕ್ಕಚಾರಗಳಿಗಾಗಿ ವ್ಯಾಪಕವಾಗಿ ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

(4) ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವುದು ತುಂಬಾ ಸುಲಭ.

(5) ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದೂ ಸುಲಭ

(6) ಕೊಡಲಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಏರುಮುಖವಾಗಿ ಯಾಗಲೀ, ಇಳಿಮುಖವಾಗಿಯಾಗಲೀ ಜೋಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ.

(7) ಸಂಖ್ಯಾಮಾಹಿತಿಗಳ ವಿಶ್ವದಿಂದ ಅನೇಕ ಮಾದರಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಅವುಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿದರೆ, ಅವೆಲ್ಲವೂ ಹೆಚ್ಚುಕಡಿಮೆ ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ, ಮಾದರಿಯಿಂದ ಮಾದರಿಗೆ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

18.8 ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯ ಅನಾನುಕೂಲಗಳು

ಮೇಲಿನ ಅನುಕೂಲಗಳೆಲ್ಲವೂ ಅಂಕಗಣಿತಿ ಸರಾಸರಿಗೆ ಲಭ್ಯವಿದ್ದರೂ, ಅದು ಕೆಲವೊಂದು ಅನಾನುಕೂಲತೆಗಳನ್ನು ಸಹ ಹೊಂದಿದೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಮುಖ್ಯವಾದುವನ್ನು ನೋಡೋಣ.

(1) ಕೊಡಲಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಗಳಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಥವಾ ಅತ್ಯಂತ ಕಡಿಮೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿದ್ದರೆ, ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ ಅದರಿಂದ ಪ್ರಭಾವಿತವಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳು ಅಂಕಗಣಿತಿ ಸರಾಸರಿಯಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಒಂದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಮೂರು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿದ್ದಾರೆ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇವುಗಳ ಸರಾಸರಿ

$$\overline{X} = \frac{0+90+30}{3} = \frac{120}{3} = 40$$

40 ಅಂಕ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ನಾವು ನೋಡಿದರೆ, ಈ ತರಗತಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಸುಮಾರಾಗಿ ಓದುವವರು ಎನಿಸುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಅಲ್ಲಿ ತುಂಬಾ ಬುದ್ಧಿವಂತನಾದ ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಮತ್ತು ತುಂಬಾ ಕಡಿಮೆ ದರ್ಜೆಯ ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಇದ್ದಾನೆ. ಇದು ಸರಾಸರಿಯಿಂದ ವ್ಯಕ್ತವಾಗುವುದೇ ಇಲ್ಲ. ಇದು ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯ ದೌರ್ಬಲ್ಯ.

(2) ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬೇಕಾದರೆ ಕೊಡಲಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಅಗತ್ಯ. ಒಂದೇ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ತಪ್ಪಿಹೋಗಿದ್ದರೂ, ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

(3) ಅನೇಕ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ನಾವು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವ ಸರಾಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಇರುವುದೇ ಇಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 5 ಕುಟುಂಬಗಳ ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆ, 5,4,3,2,0 ಆಗಿವೆ ಎಂದಿಟ್ಟು ಕೊಳ್ಳೋಣ. ಪ್ರತಿ ಕುಟುಂಬದ ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿದರೆ

$$\overline{X} = \frac{5+3+2+0}{5} = \frac{14}{5} = 2.8$$

2.8 ಆಗಿದೆ. ಇದು ಸಂಖ್ಯಾ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲವೇ ಇಲ್ಲ.

(4)ಅಂಕಗಣಿತಿ ಸರಾಸರಿ ಹೆಚ್ಚಿನ ಮೌಲ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಹೆಚ್ಚಿನ ಪ್ರಾಧಾನ್ಯತೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಕಡಿಮೆ ಮೌಲ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಕಡಿಮೆ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ಮಿತಿಗಳಿದ್ದರೂ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಗೆ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಬಹಳ ಮಹತ್ವದ ಸ್ಥಾನವಿದೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಅನುಕೂಲಗಳಿಂದಾಗಿ ತುಂಬಾ ವ್ಯಾಪಕವಾಗಿ ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿದೆ.

18.9 ಸಾರಾಂಶಿಸೋಣ

ಈ ಘಟಕದಲ್ಲಿ ನಾವು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಮಾಪಕಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿ ಕೊಳ್ಳುವ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರಥಮ ಹೆಜ್ಜೆಯನ್ನಿಟ್ಟಿದ್ದೇವೆ. ಆರು ಮುಖ್ಯವಾದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಮಾಪಕಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳೆಂದರೆ, ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ, ತೂಕ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಂಕಗಣಿತಿ ಸರಾಸರಿ, ಮಧ್ಯಕ, ಬಹುಳಕ, ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು ಹಾರ್ಮೋನಿಕ್ ಸರಾಸರಿ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲೆರಡವುಗಳಾದ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು ತೂಕ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಗಳನ್ನು ಈ ಘಟಕದಲ್ಲಿ ನಾವು ಪರಿಚಯಿಸಿ ಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ವಿವಿಧ ಶ್ರೇಣಿಗಳಿಗೆ ಇದನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡುವ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಸಾರಾಂಶಿಸುವುದಾದರೆ

(1) ವೈಯಕ್ತಿಕ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಗೆ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ

$$\overline{X} = \frac{\Sigma x i}{N}$$

(2) ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಶ್ರೇಣಿಗೆ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ

ನೇರ ಕ್ರಮ : $\overline{X} = \frac{\Sigma f.x_i}{\Sigma f}$

ಹ್ರಸ್ವಕ್ರಮ $\overline{X} = a + \frac{\Sigma f d x}{\Sigma f}$

(3) ಸತತ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಗೆ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ

ನೇರ ಕ್ರಮ $\overline{X} = \frac{\Sigma f.x_i}{\Sigma f}$

ಹ್ರಸ್ವಕ್ರಮ $\overline{X} = a + \frac{\Sigma f d^1 x}{\Sigma f} \times i$

(4) ತೂಕಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ

$$\overline{X} = \frac{\Sigma w.x}{\Sigma w}$$

18.10 ಸ್ವಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

(1) ಕೇಂದ್ರೀಯ ಮಾಪನಗಳಾವುವು?

(2) ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯ ಅನುಕೂಲಗಳು ಮತ್ತು ಅನಾನುಕೂಲಗಳು ಯಾವುವು?

(3) ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು ತೂಕ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಗಳ ನಡುವಣ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೇನು?

(4) ಕೆಳಗಿನ ನ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ .

ವರ್ಗಾಂತರ :	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
ಆವರ್ತ :	5	40	25	120	30	50

18.11 ಮುಖ್ಯ ಪರಿಭಾವನೆಗಳು

1. ಕೇಂದ್ರೀಯ ಮಾಪಕಗಳು
2. ತೂಕ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ

18.12 ಮುಂದಿನ ಓದಿಗಾಗಿ

ಸಿ.ಕೆ. ರೇಣುಕಾರ್ಯ : ಸಾಮಾಜಿಕ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ. ಅಧ್ಯಾಯ -4

ಸಿ.ಕೆ. ರೇಣುಕಾರ್ಯ : ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಪರಿಮಾಣಾತ್ಮಕ ವಿಧಾನಗಳು

ಘಟಕ -19

ಕೇಂದ್ರೀಯ ಮಾಪಕಗಳು -II

19.1 ಪೀಠಿಕೆ

19.2 ಮಧ್ಯಕದ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ

19.3 ಮಧ್ಯಕದ ಅನುಕೂಲಗಳು

19.4 ಮಧ್ಯಕದ ಅನಾನುಕೂಲಗಳು

19.5 ಚತುರ್ಥಕಗಳು

19.6 ಬಹುಳಕದ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ

19.7 ಬಹುಳಕದ ಅನುಕೂಲಗಳು

19.8 ಬಹುಳಕದ ಅನಾನುಕೂಲಗಳು

19.9 ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ, ಮಧ್ಯಕ ಮತ್ತು ಬಹುಳಕಗಳ ಗಣಿತೀಯ ಸಂಬಂಧ

19.10 ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಸರಾಸರಿ

19.11 ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಸರಾಸರಿಯ ಅನುಕೂಲಗಳು ಮತ್ತು ಅನಾನುಕೂಲಗಳು

19.12 ಹಾರ್ಮೋನಿಕ್ ಸರಾಸರಿ

19.13 ಹಾರ್ಮೋನಿಕ್ ಸರಾಸರಿಯ ಅನುಕೂಲಗಳು ಮತ್ತು ಅನಾನುಕೂಲಗಳು

19.14 ಸಾರಾಂಶಿಸೋಣ

19.15 ಮುಖ್ಯ ಪರಿಭಾವನೆಗಳು

19,16 ಸ್ವ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

19.17 ಮುಂದಿನ ಓದಿಗಾಗಿ

ಘಟಕ -19

ಕೇಂದ್ರೀಯ ಮಾಪಕಗಳು -II

19.1 ಪೀಠಿಕೆ:

ಈ ಘಟಕದಲ್ಲಿ ನೀವು ಮಧ್ಯಕ, ಬಹುಳಕ, ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು ಹಾರ್ಮೋನಿಕ್ ಸರಾಸರಿಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವ ವಿಧಾನ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಅನುಕೂಲಗಳು ಮತ್ತು ಅನಾನುಕೂಲಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುತ್ತೀರಿ.

ಮೊದಲು ಮಧ್ಯಕವನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಒಂದು ಕೊಡಲಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಆರೋಹಣ ಮತ್ತು ಅವರೋಹಣ ಕ್ರಮಗಳಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿದಾಗ,ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಮಧ್ಯಕ. ಇದನ್ನು ಮೂರು ರೀತಿಯ ಶ್ರೇಣಿಗಳಿಗೆ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ನೋಡೋಣ.

19.2 ಮಧ್ಯಕದ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ

(I)ವ್ಯಯಕ್ತಿಕವಾಗಿ ಗಮನಿಸಲಾಗಿರುವ ಶ್ರೇಣಿ

ಇದಕ್ಕೆ ಮಧ್ಯಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡುವುದಕ್ಕೆ ಬಳಸುವ ಸೂತ್ರ.

$$M = \frac{N+1}{2}$$

ಇಲ್ಲಿ M- ಮಧ್ಯಕವನ್ನು ಮತ್ತು N ಕೊಡಲಾಗಿರುವ ದತ್ತದಲ್ಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ದತ್ತದಲ್ಲಿ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ ಇರುವಾಗ ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ದತ್ತದಲ್ಲಿ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವಾಗ ಮಧ್ಯಕವನ್ನು (N/2) ನ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆ ಇವೆರಡರ ಸರಾಸರಿಯಿಂದ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

(i)ದತ್ತದಲ್ಲಿ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ ಇರುವಾಗ:

5 ಕಂಪನಿಗಳ ಲಾಭ ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ.

ಲಾಭ (ಲಕ್ಷರೂಗಳಲ್ಲಿ) 40 25 30 62 80

ಇದಕ್ಕೆ ಮಧ್ಯಕವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ಮೊದಲು ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಆರೋಹಣ ಅಥವಾ ಅವರೋಹಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸೋಣ.

25 30 40 62 80

ಈಗ ಸೂತ್ರದ ಪ್ರಕಾರ

$$M = \frac{N+1}{2} = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3\text{ನೇ ಸಂಖ್ಯೆ}$$

ಅಂದರೆ M = 40

(ii) ದತ್ತದಲ್ಲಿ ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಇರುವಾಗ:

6 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ತೂಕ ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ ಎಂದು ಬಾವಿಸೋಣ

ತೂಕ (ಕೆ.ಜಿ.ಯಲ್ಲಿ): 40 50 52 60 62 63

ಈಗ ಮಧ್ಯಕವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕಾದ ಸೂತ್ರ

$$\frac{N}{2}\text{ನ ಸಂಖ್ಯೆ} = \frac{6}{2} = 3\text{ನೇ ಸಂಖ್ಯೆ} = 52$$

ಮತ್ತು ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆ 60

ಇವೆರಡರ ಸರಾಸರಿ $= \frac{52+60}{2} = \frac{112}{2} = 56$

ಆದ್ದರಿಂದ ಮಧ್ಯಕ $\boxed{M = 56}$

(iii) ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಪಡೆಯುವ ಶ್ರೇಣಗಳು

ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಪಡೆಯುವ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಚಿತ ಆವರ್ತವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿ, ಅದರ ಮೂಲಕ, ಮಧ್ಯಕವನ್ನು $M = \frac{N+1}{2}$ ಸೂತ್ರದಿಂದ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಟೆಸ್ಟ್‌ನಲ್ಲಿ ಪಡೆದಿರುವ ಅಂಕಗಳು x	ವಿಧ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ f	ಸಂಚಿತ ಆವರ್ತ
5	20	20
7	15	35
M-8	12	47
9	15	62
10	18	80

ಮಧ್ಯಕವನ್ನು ಸಂಚಿಕತ ಆವರ್ತದ $\frac{N+1}{2}$ ನಿಂದ ಗುರುತಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ

$$\frac{N+1}{2} = \frac{80+1}{2} = \frac{81}{2} = 40.5$$

47 ಎನ್ನುವುದು 40.5ಅನ್ನು ಒಳಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮಧ್ಯಕ = 8

(iv) ಸತತ ಸಂಖ್ಯಾ ಶ್ರೇಣಗಳು

ಸತತ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯಕವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

$$M = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f_1}(m_1 - l)$$

ಇಲ್ಲಿ M-ಮಧ್ಯಕ

l_1 - ಮಧ್ಯಕವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆ

l_2 - ಮಧ್ಯಕವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಮಧ್ಯಕದ ಮೇಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆ

m_1 - $\frac{N+1}{2}$ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿ ಪಡೆಯಲಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ

f_1 - ಯಾವ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯಕ ಇದೆಯೋ ಆವರ್ಗದ ಆವರ್ತ

c = ಯಾವ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯಕ ಇದೆಯೋ ಅದರ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಸಂಚಿತ ಆವರ್ತ

ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ

ಕೆಳಗಿನ ವಿತರಣೆಗೆ ಮಧ್ಯಲಯಕವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವರ್ಗಾಂತರ	ಆವರ್ತ f	ಸಂಚಿತ ಆವರ್ತ c.f
0-10	4	4
10-20	12	16
20-30	24	40
30-40	36	76
40-50	20	96
50-60	16	112
60-70	8	120
70-80	5	125
	$\sum f = 125$	

$$M = \frac{N+1}{2}$$

$$M = \frac{125+1}{2} = \frac{125+1}{2} = \frac{126}{2} = 63$$

ಮಧ್ಯಕ 30-40 ರ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿದೆ. ಮಧ್ಯಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಸೂತ್ರ

$$M = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f_1}(m_1 - C)$$

$$M = 30 + \frac{40-30}{36}(63-40)$$

$$M = 30 + \frac{10}{36}(23)$$

$$M = 30 + \frac{230}{36}$$

$$M = 30 + 6.36$$

$$M = 36.36$$

19.3 ಮಧ್ಯಕದ ಅನುಕೂಲಗಳು

ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಂತೆ, ಮಧ್ಯಕಕ್ಕೆ ಕೆಲವು ಹೆಚ್ಚಿನ ಅನುಕೂಲಗಳಿವೆ. ಅದರ ಮುಖ್ಯ ಅನುಕೂಲಗಳು ಮತ್ತು ಅನಾನುಕೂಲಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಅನುಕೂಲಗಳು:

1. ಮಧ್ಯಕ ಕೊಡಲಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಎರಡು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅತ್ಯಂತ ದೊಡ್ಡ ಪ್ರಮಾಣದ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಸಹ ಮಧ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮಧ್ಯಕದಿಂದ ಸುಲಭವಾಗಿ ಗುರುತಿಸಬಹುದು.
2. ಮಧ್ಯಕವನ್ನು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆ.
3. ಮಧ್ಯಕವನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.
4. ಮಧ್ಯಕವನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಮೂಡಿಸುವುದು ಸಹ ಸಾಧ್ಯ.
5. ಮಧ್ಯಕವನ್ನು ಆಧರಿಸಿ, ಚತುರ್ಥಕ, ದಶಮಾಂಶೀಯ ಮಾಪಕ, ಶತಮಾಂಶೀಯ ಮಾಪಕಗಳನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಪಡಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

19.4 ಮಧ್ಯಕದ ಅನಾನುಕೂಲಗಳು

1. ಮಧ್ಯಕ ಒಂದು ಸ್ಥಾನೀಯ ಮಾಪಕ. ಹೀಗಾಗಿ ಅದರ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಗೊತ್ತು ಮಾಡುವಾಗ ಸಂಖ್ಯಾ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಗಣನೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.
2. ಮಧ್ಯಕವನ್ನು ಮುಂದಿನ ಗಣಿತೀಯ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳಿಗಾಗಿ ಬಳಸುವುದಕ್ಕಾಗುವುದಿಲ್ಲ.
3. ಮಧ್ಯಕ, ಸಂಖ್ಯಾ ಮಾಹಿತಿಯ ಮಾದರಿಗಳು ಬದಲಾದಂತೆ ಬದಲಾಗುತ್ತಾಹೋಗುತ್ತದೆ.

19.5 ಚತುರ್ಥಕಗಳು(Quartils)

ಮಧ್ಯಕದ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಚತುರ್ಥಕಗಳನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಚತುರ್ಥಕ ಒಂದು ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು 4 ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸುತ್ತದೆ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಮೇಲಿನ ಚತುರ್ಥಕ (Upper Quartile) ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ಚತುರ್ಥಕ (Lower Quaritile) ಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲಾಗುತ್ತದೆ. ಚತುರ್ಥಕಗಳನ್ನು ಮಧ್ಯಕಗಳಂತೆಯೇ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲಾಗುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗೆ ಚತುರ್ಥಕಗಳ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಮೇಲಿನ ಚತುರ್ಥಕ (Upper Quartile) = $Q_1 = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f_1} (q_1 - C)$

ಕೆಳಗಿನ ಚತುರ್ಥಕ (Lower Quaritile) = $Q_3 = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f_1} (q_3 - C)$

ಇಲ್ಲಿ Q_1 = ಮೇಲಿನ ಚತುರ್ಥಕ

l_1 - ಮೇಲಿನ ಚತುರ್ಥಕ ಇರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆ

l_2 - ಮೇಲಿನ ಚತುರ್ಥಕ ಇರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮೇಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆ

f_1 - ಮೇಲಿನ ಚತುರ್ಥಕ ಇರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವರ್ತ

c - ಮೇಲಿನ ಚತುರ್ಥಕ ಇರುವ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಚಿತ ಆವರ್ತದ ಹಿಂದಿನ ಆವರ್ತ

$q_1 - \frac{N+1}{4}$ ಸೂತ್ರದಿಂದ ಪಡೆಯಲಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ

Q_3 - ಕೆಳಗಿನ ಚತುರ್ಥಕ

l_1 - ಕೆಳಗಿನ ಚತುರ್ಥಕ ಇರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆ

l_2 - ಮೇಲಿನ ಚತುರ್ಥಕ ಇರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮೇಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆ

f_1 - ಕೆಳಗಿನ ಚತುರ್ಥಕ ಇರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವರ್ತ

q_3 - $(N+1)\dfrac{3}{4}$ ಸೂತ್ರದಿಂದ ಪಡೆಯಲಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ

c - ಮೇಲಿನ ಚತುರ್ಥಕ ಇರುವ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಚಿತ ಆವರ್ತದ ಹಿಂದಿನ ಆವರ್ತ

<u>ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ:</u>

ಕೆಳಗಿನ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ಮೇಲಿನ ಚತುರ್ಥಕ ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ಚತುರ್ಥಕಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಕಂಪನಿಗಳ (ಲಕ್ಷ ರೂಗಳಲ್ಲಿ) x	ಲಾಭ ಕಂಪನಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ f	c.f.
20-30	4	4
30-40	8	12
Q1 40-50	18	30
50-60	30	60
60-70	15	75
70-80	10	85
80-90	8	93
90-100	7	100

$$q_1 = \frac{n+1}{4} = \frac{101}{4} = 25.25$$

$$q_3 = (N+1)\frac{3}{4} = \frac{303}{4} = 75.75$$

$$Q_1 = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f_1}(q_1 - C)$$

$$Q_1 = 40 + \frac{50-40}{18}(25.25-12)$$

$$Q_1 = 40 + \frac{10}{18}(13.25)$$

$$Q_1 = 40 + \frac{132.5}{18}$$

$$Q_1 = 40 + 7.3$$

$$\boxed{Q_1 = 47.3}$$

$$Q_3 = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f_1}(q_3 - C)$$

$$Q_3 = 70 + \frac{80-70}{10}(75.75-75)$$

$$Q_3 = 70 + \frac{10}{10}(0.75)$$

$$Q_3 = 70+0.75$$

$$\boxed{Q_3 = 70.75}$$

ಮೇಲಿನ ಚತುರ್ಥಕ Q_1 ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ಚತುರ್ಥಕ Q_3 ಗಳ ಬಳಕೆಯನ್ನು ನಾವು ಮುಂದೆ ನೋಡುತ್ತೇವೆ.

19.6 ಬಹುಳಕ (Mode)

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ: ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಪದೇ-ಪದೇ ಕಾಣಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬಹುಳಕ ಅಥವಾ ಆದರ್ಶ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಬಹುಳಕವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲಾಗುತ್ತದೆ.

(i). ವೈಯಕ್ತಿಕವಾಗಿ ಗಮನಿಸಲಾಗಿರುವ ಶ್ರೇಣಿಗಳು

ಇಂತಹ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಕೇವಲ ಕಣ್ಣೋಟದಿಂದ ಬಹುಳಕವನ್ನು ಗುರುತಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಪದೇ ಪದೇ ಕಾಣಿಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗುವ ಬಹುಳಕದ ಚಿಹ್ನೆ Z .

ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

X : 5, 9, 4, 3, 3, 2, 3, 6, 7, 5,

ಈ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ 3, 3 ಬಾರಿ ಕಾಣಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ ಬಹುಳಕ 3. ಅಂದರೆ $Z = 3$

(ii) ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಪಡೆಯುವ ಶ್ರೇಣಿಗಳು

ಇಂತಹ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಆವರ್ತಗಳನ್ನು ಗುಂಪು ಮಾಡಿಕೊಂಡು ಬಹುಳಕವನ್ನು ಗುರುತಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಕೆಳಗಿನ ಕ್ರಮವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

(i) ಆವರ್ತವನ್ನು ಮೊದಲನೆಯ ಕಾಲಂ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಎರಡೆರಡು ಆವರ್ತಗಳನ್ನು ಆಯ್ದುಕೊಂಡು ಅದರ ಮೊತ್ತ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಕಾಲಂ 2 ರಲ್ಲಿ ಹಾಕಿ.

(2) ಮೊದಲ ಆವರ್ತವನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಎರಡೆರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮೊತ್ತ ಮಾಡಿ ಕಾಲಂ 3ರಲ್ಲಿ ಹಾಕಿ.

(3) ಮೊದಲ ಮೂರು ಆವರ್ತಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಮೊತ್ತಮಾಡಿ ಕಾಲಂ 4ರಲ್ಲಿ ಹಾಕಿ

(4) ಮೊದಲ ಆವರ್ತವನ್ನು ಬಿಟ್ಟು, ಮೂರು ಮೂರು ಆವರ್ತಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಮೊತ್ತಮಾಡಿ ಕಾಲಂ 5ರಲ್ಲಿ ಹಾಕಿ.

(5) ಮೊದಲೆರಡು ಆವರ್ತಗಳನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಮೂರು- ಮೂರು ಆವರ್ತಗಳನ್ನು ಮೊತ್ತಮಾಡಿ ಕಾಲಂ 6ರಲ್ಲಿ ಹಾಕಿ.

(6) ಗರಿಷ್ಠ ಬಾರಿ ಕಾಣಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬಹುಳಕವೆಂದು ಗುರುತಿಸಿ.

ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ

ಕೆಳಗಿನ ವಿತರಣೆಗೆ ಬಹುಳಕವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ.

ಸೈಜ್	ಆವರ್ತ
1	6
2	10
3	13
4	19
5	21
6	20
7	19
8	9
9	5
10	3

ಸೈಜ್	ಕಾಲಂ 1 ಆವರ್ತ	ಕಾಲಂ 2	ಕಾಲಂ 3	ಕಾಲಂ 4	ಕಾಲಂ 5	ಕಾಲಂ 6
1	6	16				
2	10		23	29		
3	13	32			42	
4	19		40	60		53
5	21	41				
6	20		39		60	
7	19	28		33		48
8	9					
9	5		14		17	
10	3	8				

ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಪಟ್ಟಿ

ಕಾಲಂ ಸಂಖ್ಯೆ	ಗರಿಷ್ಠ ಆವರ್ತ ಇರುವ ಸೈಜ್
1	5
2	5, 6
3	4, 5
4	4, 5, 6
5	5, 6, 7
6	3, 4, 5
ಗರಿಷ್ಠ ಸೈಜ್ ಎಷ್ಟುಬಾರಿ ಕಾಣಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದರ ಮಾಹಿತಿ	1, 3, 6, 3, 1

ಸಂಖ್ಯೆ 5 ಆರು ಬಾರಿ ಕಾಣಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದರಿಂದ ಇದು ಬಹುಳಕ

41

(iii) ಸತತ ಸಂಖ್ಯಾ ಶ್ರೇಣಿಗೆ ಬಹುಳಕ

ಸತತ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಗೆ ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

$$Z = L + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times i$$

ಇಲ್ಲಿ Z = ಬಹುಳಕ

L = ಬಹುಳಕ ಇರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆ

Δ_1 - ಬಹುಳಕ ಇರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವರ್ತ ಮತ್ತು ಅದರ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವರ್ತದ ನಡುವಣ ವ್ಯತ್ಯಾಸ

Δ_2 - ಬಹುಳಕ ಇರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವರ್ತ ಮತ್ತು ಮುಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವರ್ತದ ನಡುವಣ ವ್ಯತ್ಯಾಸ

i = ವರ್ಗಾಂತರ

ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ:

ಮಾರಾಟ (ಲಕ್ಷ ರೂಗಳಲ್ಲಿ)	ಕಂಪನಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
58-60	12
60-62	18
62-64	25
64-66	30
66-68	10
68-70	3
70-72	2
	$\Sigma f = 100$

ಮೇಲಿನ ವಿತರಣೆಗೆ ಬಹುಳಕವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ:

$$Z = L + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times i$$

L = 64

Δ_1 = (30-25) = 5

Δ_2 = (30-10) = 20

i = 2

Z = 64

$$Z = 64 + \frac{64}{5 + 20} = 64.4$$

19.7 ಬಹುಳಕದ ಅನುಕೂಲಗಳು

1. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯಾ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಪದೇ ಪದೇ ಪ್ರಕಟವಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬಹುಳಕವೆಂದು ಗುರುತಿಸಲಾಗುವುದರಿಂದ ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಆ ಸಂಖ್ಯೆ ಪ್ರಾತಿನಿಧಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.
2. ವೈಯಕ್ತಿಕವಾಗಿ ಗಮನಿಸಲಾಗಿರುವ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಬಹುಳಕವನ್ನು ಗುರುತಿಸುವುದು ಬಹಳ ಸುಲಭ.
3. ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದೆರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಬಿಟ್ಟುಹೋಗಿದ್ದರೂ ಬಹುಳಕವನ್ನು ಗುರುತಿಸಬಹುದು.
4. ಬಹುಳಕವನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಸುಲಭ
5 ಬಹುಳಕವನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಮೂಡಿಸಬಹುದು.

19.8 ಬಹುಳಕದ ಅನಾನುಕೂಲಗಳು:

1. ಅನೇಕ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಬಹುಳಕಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 10 ಜನರ ಆದಾಯ ಹೀಗಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ

ರೂ.1000, 1500, 1000, 1500, 600, 1000, 1500, 900, 800, 700

ಇಲ್ಲಿ ರೂ 1000 ಎನ್ನುವುದು 3ಬಾರಿ ಮತ್ತು ರೂ 1500ಎನ್ನುವುದು ಮೂರುಬಾರಿ ಪ್ರಕಟಗೊಂಡಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ 2 ಬಹುಳಕಗಳಿವೆ. ಹಾಗೆಯೇ ಬಹಳ ಬಹುಳಕಗಳಿರುವುದು ಸಾಧ್ಯ. ಆಗ ಬಹುಳಕದ ಪರಿಭಾವನೆ ಅರ್ಥಹೀನವಾಗುತ್ತದೆ.

(2) ಬಹುಳಕದ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಸ್ವಲ್ಪ ಕಷ್ಟಕರವಾದುದು. ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುಂಪು ಮಾಡಿ ಬಹುಳಕವನ್ನು ಗುರುತಿಸುವ ವಿಧಾನ ಕಷ್ಟಕರವಾದುದು.

19.9 ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ, ಮಧ್ಯಕ ಮತ್ತು ಬಹುಳಕಗಳ ಗಣಿತೀಯ ಸಂಬಂಧ

ಮೇಲಿನ ಸರಾಸರಿಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು

$Z = \overline{X} - 3(\overline{X} - M)$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ಗುರುತಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡು ಸರಾಸರಿಗಳು ಗೊತ್ತಿದ್ದರೆ, ಮತ್ತೊಂದನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯಾ ಶ್ರೇಣಿಯ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ 50 ಆಗಿದೆ. ಅದರ ಮಧ್ಯಕ 55 ಆಗಿದೆ. ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ ಬಹುಳಕವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

$\overline{X} = 50, M = 55$

$Z = \overline{X} - 3(\overline{X} - M)$

$Z = 50-3(50-55)$

$Z = 50-3(-5)$

$Z = 50+15 = 65$

19.10 ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಸರಾಸರಿ

ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಸರಾಸರಿ, ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ, ಮಧ್ಯಕ, ಮತ್ತು ಬಹುಳಕಗಳಿಗಿಂತ ಮುಖ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ: $X_1\ X_2\ X_3\ \ldots\ldots X_n$ ಗಳು ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯಾದರೆ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಸರಾಸರಿ $= \text{Antilog}\left(\frac{\Sigma \log x_i}{N}\right)$

ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ

ವೈಯಕ್ತಿಕ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಗೆ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನ

X: 133, 141, 125, 173, 182

x	log x
133	2.1239
141	2.1492
125	2.0969
173	2.2380
183	2.2601
N = 5	$\Sigma \log X = 10.8681$

$$= \sqrt[n]{x_1 . x_2 . x_3 ...... x_n}$$

$$= \text{Anti-log} \left(\frac{\log x_1 + \log x_2 ... + \log x_n}{N} \right)$$

$$= \text{Anti-log} \left(\frac{10.8681}{5} \right) = \text{Anti-log } 2.1736$$

$$= 149$$

19.11 ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಸರಾಸರಿಯ ಅನುಕೂಲಗಳು ಮತ್ತು ಅನಾನುಕೂಲಗಳು

ಅನುಕೂಲಗಳು:

1. ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಅತ್ಯಂತ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ವಿವರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.
2. ಇದು ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗಮನಕ್ಕೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.
3. ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯ ಲೆಕ್ಕಚಾರಕ್ಕೂ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಸರಾಸರಿ ಅನುವುಮಾಡಿಕೊಡುತ್ತದೆ.
4. ಮಾದರಿಗಳು ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾದರೂ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಸರಾಸರಿ ಅಷ್ಟು ವ್ಯತ್ಯಾಸಗೊಳ್ಳುವುದಿಲ್ಲ.

ಅನಾನುಕೂಲಗಳು:

(1) ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವುದು ಕಷ್ಟ. ಏಕೆಂದರೆ ಇದು ಲಾಗರಿದಂಅನ್ನು ಒಳಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಲಾಗರಿದಂನ ಜ್ಞಾನವಿಲ್ಲದೇ ಇರುವವರು ಇದನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಕಷ್ಟ

(2) ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿ ಬಹಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದ್ದರೆ, ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವುದು ಕಷ್ಟ.

(3) ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ 0 ಅಥವಾ ಋಣಾತ್ಮಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದ್ದರೆ, ಅವುಗಳಿಗೆ ಲಾಗರಿದಂ ಇರುವುದಿಲ್ಲವಾದುದರಿಂದ, ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಇವೆಲ್ಲ ಮಿತಿಗಳಿದ್ದರೂ, ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಸರಸರಿ, ಅನುಪಾತ, ಪ್ರಪೋರ್ಷನ್ ಇರುವಾಗ ಉಪಯುಕ್ತ ಸರಾಸರಿ ಯಾಗುತ್ತದೆ.

<u>ಹಾರ್ಮೋನಿಕ್ ಸರಾಸರಿ</u>

ಹಾರ್ಮೋನಿಕ್ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸೂತ್ರೀಕರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಹಾರ್ಮೋನಿಕ್ ಸರಾಸರಿ = ರೆಸಿ ಪ್ರೋಕಲ್ ಆಫ್ $\dfrac{\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + ... + \frac{1}{X_n}}{N}$

ಅಥವಾ ಹಾರ್ಮೋನಿಕ್ ಸರಾಸರಿ = ರೆಸಿ ಪ್ರೋಕಲ್ ಆಫ್ $\dfrac{\Sigma 1/x\,i}{N}$

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: X: 3, 5, 6, 6, 7, 10, 12, ಶ್ರೇಣಿಗೆ ಹಾರ್ಮೋನಿಕ್ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$= \text{Rec} \; \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12}}{7}$$

$$= \text{Rec} \left[\frac{140 + 84 + 70 + 70 + 60 + 42 + 35}{420} \right]$$

$$= \text{Rec} \; \frac{501}{2940}$$

$$\text{H.M.} = \frac{2940}{501} = 5.87$$

19.13 ಹಾರ್ಮೋನಿಕ್ ಸರಾಸರಿಯ ಅನುಕೂಲಗಳು ಮತ್ತು ಅನಾನುಕೂಲಗಳು

ಅನುಕೂಲಗಳು:

(1) ಹಾರ್ಮೋನಿಕ್ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ಸೂತ್ರೀಕರಿಸಲಾಗಿದೆ.

(2) ಹಾರ್ಮೋನಿಕ್ ಸರಾಸರಿ, ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯ ಎಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಗಮನಕ್ಕೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.

(3) ಹಾರ್ಮೋನಿಕ್ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ಲೆಕ್ಕಚಾರಗಳಿಗೆ ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

(4) ಮಾದರಿಯಿಂದ ಮಾದರಿಗೆ ಹಾರ್ಮೋನಿಕ್ ಸರಾಸರಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗೊಳ್ಳುವುದಿಲ್ಲ.

(5) ಅನುಪಾತಗಳು, ಪ್ರಮಾಣಗಳು, ದರಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿ ಒಳಗೊಂಡಿರುವಾಗ ಹಾರ್ಮೋನಿಕ್ ಸರಾಸರಿಇತರ ಸರಾಸರಿಗಳಿಗಿಂತ ಉತ್ತಮ ಫಲಿತಾಂಶ ನೀಡುತ್ತದೆ.

ಅನಾನುಕೂಲಗಳು:

(1) ಹಾರ್ಮೋನಿಕ್ ಸರಾಸರಿ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಹೆಚ್ಚಿನ ತೂಕವನ್ನು ಮತ್ತು ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಕಡಿಮೆ ತೂಕವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ.

(2) ಹಾರ್ಮೋನಿಕ್ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವುದು ಕಷ್ಟ

ಮೇಲಿನ ಮಿತಿಗಳಿದ್ದರೂ, ಈಗಾಗಲೇ ಹೇಳಿರುವಂತೆ ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಹಾರ್ಮೋನಿಕ್ ಸರಾಸರಿ ಉತ್ತಮ ಫಲಿತಾಂಶ ಕೊಡುತ್ತದೆ.

19.14 ಸಾರಾಂಶಿಸೋಣ

ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನೀವು ಮಧ್ಯಕ, ಬಹುಳಕ, ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು ಹಾರ್ಮೋನಿಕ್ ಸರಾಸರಿಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ್ದೀರಿ. ಇವುಗಳ ಫಾರ್ಮಲಾಗಳನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳುವುದು ಮುಖ್ಯ. ಇವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸಾರಾಂಶಿಸಬಹುದು.

(1)ಮಧ್ಯಕ :(i) ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ ಇರುವಾಗ

(ii) ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಇರುವಾಗ N/2 ಮತ್ತು ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸರಾಸರಿ.

(2) ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಪಡೆಯುವ ಶ್ರೇಣಿಗಳಿಗೆ $M = \frac{N+1}{2}$ ವನ್ನು ಸಂಚಿತ ಆವರ್ತದ ಮೂಲಕ ಗುರುತಿಸಬೇಕು.

(3) ಸತತ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಗೆ

$$M = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f_1}(m_1 - C)$$

(4) ಮೇಲಿನ ಚತುರ್ಥಕ

$$Q_1 = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f_1}(q_1 - C)$$

(5) ಕೆಳಗಿನ ಚತುರ್ಥಕ

$$Q_3 = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f_1}(q_3 - C)$$

(6) ಬಹುಳಕ

(i) ವೈಯಕ್ತಿಕವಾಗಿ ಗಮನಿಸಲಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು Z =ಪದೇ ಪದೇ ಕಾಣಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಸಂಖ್ಯೆ

(ii) ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಪಡೆಯುವ ಶ್ರೇಣಿಗೆ ವಿತರಣೆಪಟ್ಟಿಯ ಮೂಲಕ Z ಅನ್ನು ಗುರುತಿಸಬೇಕು.

(iii) ಸತತ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿ

$$Z = L + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times i$$

(7) ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ, ಮಧ್ಯಕ, ಮತ್ತು ಬಹುಳಕಗಳ ಗಣಿತೀಯ ಸಂಬಂಧ

$$Z = \overline{X} - 3(\overline{X} - M)$$

(8) ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಸರಾಸರಿ = Antilog $\left(\frac{\Sigma \log x_i}{N}\right)$

(9) ಹಾರ್ಮೋನಿಕ್ ಸರಾಸರಿ = ರೆಸಿ ಪ್ರೋಕಲ್ ಆಫ್ $\left(\frac{\Sigma \frac{1}{x i}}{N}\right)$

19.15 ಮುಖ್ಯ ಪರಿಭಾವನೆಗಳು

(1) ಮಧ್ಯಕ - M

(2) ಬಹುಳಕ - ಡಿ

(3) ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಸರಾಸರಿ

(4) ಹಾರ್ಮೋನಿಕ್ ಸರಾಸರಿ

(5) ಮೇಲಿನ ಚತುರ್ಥಕ - Q_1

(6) ಕೆಳಗಿನ ಚತುರ್ಥಕ - Q_3

19.16 ಸ್ವ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

(1) ಕೆಳಗಿನ ನ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಮಧ್ಯಕ, ಮೇಲಿನ ಚತುರ್ಥಕ, ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ಚತುರ್ಥಕ ಹಾಗೂ ಬಹುಳಕವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವರ್ಗಾಂತರ	ಆವರ್ತ
0-10	5
10-20	15
20-30	25
30-40	40
40-50	50
50-60	60
60-70	70
70-80	15

(2) ಕೆಳಗಿನ ನ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು ಹಾರ್ಮೋನಿಕ್ ಸರಾಸರಿಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿ.

X : 1, 4, 9, 15, 10

19.17 ಮುಂದಿನ ಓದಿಗಾಗಿ

1. D.N. Ethance: Fundamentals of Statisticsl ಅಧ್ಯಾಯ 8
Kitab Mohal Publications(Latest Edition) New Delhi

ಬ್ಲಾಕ್-5.

ಘಟಕ -20
ವಿಚಲನ ಮಾಪಕಗಳು

ಘಟಕ -20

ವಿಚಲನ ಮಾಪಕಗಳು

20.1 ಪೀಠಿಕೆ :

ಹಿಂದಿನ ಎರಡು ಘಟಕಗಳಲ್ಲಿ ನಾವು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಮಾಪಕಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದೆವು. ಕೇಂದ್ರೀಯ ಮಾಪಕಗಳು, ಕೊಡಲಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯಾ ಶ್ರೇಣಿಯ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಆದರೆ, ಸರಾಸರಿಯಷ್ಟೇ ಮುಖ್ಯವಾದ ಮತ್ತೊಂದು ಮಾಪಕವೆಂದರೆ ವಿಚಲನ ಮಾಪಕ ಅಥವಾ ಚದುರುವಿಕೆ ಮಾಪಕ. ವಿಚಲನ ಮಾಪಕ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೂ, ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಮಾಪಕದಿಂದ ಸರಾಸರಿ ಎಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಇದು ತುಂಬಾ ಅಗತ್ಯ. ಎರಡು ಕಂಪನಿಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಕೆಳಗಿನ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ವರ್ಷ	ಕಂಪನಿ Aಯ ಲಾಭ (ಲಕ್ಷ ರೂಗಳಲ್ಲಿ)	ಕಂಪನಿ Bಯ ಲಾಭ (ಲಕ್ಷ ರೂಗಳಲ್ಲಿ)
1999	10	30
2000	10	10
2001	10	5
2002	10	5
2003	10	0
	50	50

$$\overline{X}_A = \frac{50}{5} = 10 \qquad \overline{X}_B = \frac{50}{5} = 10$$

ಎರಡು ಕಂಪನಿಗಳ ಸರಾಸರಿ ಲಾಭ ರೂ 10 ಲಕ್ಷ ಆದರೆ A ಕಂಪನಿ ದೃಢವಾಗಿದ್ದರೆ B ಕಂಪನಿ ನಷ್ಟಕ್ಕೆ ಗುರಿಯಾಗಿದೆ.ಆದ್ದರಿಂದ ಸರಾಸರಿ, ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯ ಒಳಗೆ ಇರುವ ಚದುರುವಿಕೆಯನ್ನು ತಿಳಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಚದುರುವಿಕೆ ಮಾಪಕ ಇದನ್ನು ಮಾಡುತ್ತದೆ.

ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನೀವು ಪರಿಮಿತಿ (Range), ಚತುರ್ಥಕ ವಿಚಲನ (Quartice deviation) ಮತ್ತು ಸರಾಸರಿ ವಿಚಲನ (Mean deviation)ಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುತ್ತೀರಿ. ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡುವ ವಿಧಾನ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಅನುಕೂಲಗಳು ಮತ್ತು ಅನಾನುಕೂಲಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುತ್ತೀರಿ.

20.2 ಪರಿಮಿತಿ ವಿಚಲನೆ (Range)

ಪರಿಮಿತಿ ವಿಚಲನ ಅತ್ಯಂತ ಸರಳವಾದ ಚದುರುವಿಕೆ ಮಾಪಕ

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ: ಸಂಖ್ಯಾ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿರುವ ಅತ್ಯಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಮತ್ತು ಅತ್ಯಂತ ಕಡಿಮೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವಣ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೇ ಪರಿಮಿತಿ

ಉದಾಹರಣೆ : 10 ಜನರ ಆದಾಯದ ಮಾಹಿತಿ ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಪರಿಮಿತಿಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ

X : ಆದಾಯ (ಸಾವಿರ ರೂ ನಲ್ಲಿ)

50, 30, 25, 10, 5, 4, 4, 3, 3, 3,

ಪರಿಮಿತಿ = H - L

H = ಅತ್ಯಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಸಂಖ್ಯೆ

L = ಅತ್ಯಂತ ಕಡಿಮೆ ಸಂಖ್ಯೆ

H = 50

$L = 3$

ಪರಿಮಿತಿ $R = H - L$

$= 50 - 3 = 47$

20.3 ವಿಚಲನ ಮಾಪಕ ಗುಣಾಂಕ:

ವಿಚಲನ ಮಾಪಕದ ದಾಮಾಷ, ಸಾಪೇಕ್ಷ ವಿಚಲನ ಮಾಪಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ನಾವು ಯಾವುದೇ ವಿಚಲನ ಮಾಪಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿದರೂ, ನಿರಪೇಕ್ಷ ವಿಚಲನ ಮಾಪಕ ಮತ್ತು ಸಾಪೇಕ್ಷ ವಿಚಲನ ಮಾಪಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ

ಪರಿಮಿತಿ $= R = H - L$ ಇದು ನಿರಪೇಕ್ಷ (measure of range) ಪರಿಮಿತಿ ಮಾಪಕ

ಪರಿಮಿತಿ ಗುಣಾಂಕ $= \frac{H - L}{H + L}$ ಇದು ಸಾಪೇಕ್ಷ (Relative measure of dispersions) ಪರಿಮಿತಿ ಮಾಪಕ

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗೆ

ಪರಿಮಿತಿ ಗುಣಾಂಕ $= \frac{50 - 3}{50 + 3} = \frac{47}{53} = 0.89$

20.4 ಪರಿಮಿತಿಯ ಅನುಕೂಲಗಳು ಮತ್ತು ಅನಾನುಕೂಲಗಳು:

ಅನುಕೂಲಗಳು:

(1) ಪರಿಮಿತಿ ಅತ್ಯಂತ ಸರಳವಾದ ಮಾಪಕ

(2) ಪರಿಮಿತಿ ಎಲ್ಲರಿಗೂ ಅರ್ಥವಾಗುವ ಮಾಪಕ

(3) ಪರಿಮಿತಿಯನ್ನು ಅತ್ಯಂತ ಕ್ಷಿಪ್ರವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು.

ಅನಾನುಕೂಲಗಳು:

(1) ಪರಿಮಿತಿಗೆ ಗಣಿತೀಯ ನಿದಿಷ್ಟತೆ ಇಲ್ಲ

(2) ಸಂಖ್ಯಾ ಶ್ರೇಣಿ ತುಂಬಾ ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುವಾಗ ಇದನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವುದು ಕಷ್ಟ

(3) ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯ ಎಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಇದು ಗಣನೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದಿಲ್ಲ.

ಮೇಲಿನ ಮಿತಿಗಳಿದ್ದರೂ ಅತ್ಯಂತ ಶೀಘ್ರವಾಗಿ ವಿಚಲನ ಮಾಪಕ ಅಗತ್ಯವಾದಾಗ ಪರಿಮಿತಿಯನ್ನು ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

20.5 ಚತುರ್ಥಕ ವಿಚಲನ : (Quartile deviation)

ಚತುರ್ಥಕ ವಿಚಲನವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರದಿಂದ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಚತುರ್ಥಕ ವಿಚಲನ $= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

ಚತುರ್ಥಕ ವಿಚಲನ ದಾಮಾಷ $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

ವಿವಿಧ ಸಂಖ್ಯಾ ಶ್ರೇಣಿಗಳಿಗೆ ಹೇಗೆ ವಿಚಲನ ಮಾಪಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲಾಗುತ್ತದೆ ನೋಡೋಣ

ವೈಯಕ್ತಿಕವಾಗಿ ಗಮನಿಸಲಾಗಿರುವ ಶ್ರೇಣಿ-

ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಕೆಳಗಿನ ನ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಚತುರ್ಥಕ ವಿಚಲನೆ ಮತ್ತು ಚತುರ್ಥಕ ವಿಚಲನ ದಾಮಾಶ್ಪವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದಿನಗೂಲಿ (ರೂ ನಲ್ಲಿ) X - 40 50 60 65 70 80 90

$$Q_1 = \frac{N+1}{4} = \frac{7+1}{4} = \frac{8}{4} = 2\text{ನೇ ಸಂಖ್ಯೆ} = 50$$

$$Q_4 = (N+1)\frac{8}{4} = \frac{8 \times 3}{4} = 6\text{ನೇ ಸಂಖ್ಯೆ} = 80$$

$$\text{ಚತುರ್ಥಕ ವಿಚಲನ} = \frac{80-50}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

$$\text{ಚತುರ್ಥಕ ವಿಚಲನ ಗುಣಾಂಕ} = \frac{80-50}{80+50} = \frac{30}{130} = 0.23$$

ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಪಡೆಯುವ ಶ್ರೇಣಿ

ಕೆಳಗಿನ ನ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಚತುರ್ಥ ವಿಚಲನ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ತೂಕ	120	122	124	126	130	140	150	160
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	1	3	5	7	10	3	1	1
ಸಂಚಿತ ಆವರ್ತ(c.f)	1	4	9	16	26	29	30	31

$$Q_1 = \left[\frac{N+1}{4}\right] \quad \text{ಅಥವಾ} \quad \frac{30+1}{4} = \frac{31}{4} = 8\text{ ನೇ ಸಂಖ್ಯೆ} = 124$$

$$Q_3 = (N+1)\frac{3}{4} \quad \text{ಅಥವಾ} \quad (30+1)\frac{3}{4} = 24\text{ನೇ ಸಂಖ್ಯೆ} = 130$$

$$\text{ಚತುರ್ಥಕ ವಿತರಣೆ} = \frac{130-124}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\text{ಚತುರ್ಥಕ ವಿತರಣೆ ಗುಣಾಂಕ} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{130-124}{130+124} = 0.0236$$

ಸತತ ಸಂಖ್ಯಾ ಶ್ರೇಣಿ

ಕೆಳಗಿನ ನ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಚತುರ್ಥಕ ವಿತರಣೆ ಮತ್ತು ಚತುರ್ಥಕಗುಣಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಆದಾಯ (ರೂ ಸಾವಿರದಲ್ಲಿ)	ಜನರ ಸಂಖ್ಯೆ
Less than 50	54
50-70	100
70-90	140
90-110	300
110-130	230
130-150	125
Above 150	51
	1000

	(f)	(C.f).
Less than 50	54	54
50-70	100	154
70-90	140	294
90-110	300	594
110-130	230	824
130-150	125	949
Above 150	51	1000

$q_1 = \frac{1000}{4} = 250$ ನೇ ಸಂಖ್ಯೆ. ಇದು 70 - 90 ರ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿದೆ.

$q_3 = 3\left[\frac{1000}{4}\right] = 750$ ನೇ ಸಂಖ್ಯೆ. ಇದು 110 - 130 ರ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿದೆ.

$$Q_1 = 70 + \left(\frac{20}{140}\right)(250 - 154) = 70 + \left(\frac{20}{140} \text{ x } 96\right) = 70 + 13.7 = 83.7$$

$$Q_3 = 110 + \left(\frac{20}{230}\right)(750 - 594) = 110 + \left(\frac{20}{230} \text{ x } 156\right) = 110 + 13.5 = 123.5$$

ಚತುರ್ಥಕ ವಿಚಲನ ಗುಣಾಂಕ $= \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{123.5 - 83.7}{2} = 19.9$

20.6 ಚತುರ್ಥಕ ವಿಚಲನದ ಅನುಕೂಲಗಳು ಮತ್ತು ಅನಾನುಕೂಲಗಳು

ಅನುಕೂಲಗಳು:

(1) ಚತುರ್ಥಕ ವಿಚಲವನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

(2) ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ವಿಪರೀತವಾದ ಅಂತರ ವಿದ್ದರೂ ಚತುರ್ಥಕ ವಿಚಲನ ಪ್ರಭಾವಿತವಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಅನಾನುಕೂಲಗಳು:

(1) ಚತುರ್ಥಕ ವಿಚಲನ ಒಂದು ಸ್ಥಾನೀಯ ಮಾಪಕ

(2) ಚತುರ್ಥಕ ವಿಚಲನ ಸಂಖ್ಯಾ ಶ್ರೇಣಿಯ ಎಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಇದುಗಮನಕ್ಕೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದಿಲ್ಲ.

(3) ಚತುರ್ಥಕ ವಿಚಲನವನ್ನು ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ಲೆಕ್ಕಚಾರಕ್ಕೆ ಬಳಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

(4) ಮಾದರಿ ಬದಲಾದಂತೆ ಚತುರ್ಥಕ ವಿಚಲನದ ಮೌಲ್ಯವೂ ಬದಲಾಗುತ್ತಾಹೋಗುತ್ತದೆ.

20.7 ಸರಾಸರಿ ವಿಚಲನ ಮಾಪಕ : (Mean deviation)

ಸರಾಸರಿ ವಿಚಲನ ಮಾಪಕ ಸಂಖ್ಯಾ ಶ್ರೇಣಿಯ ಪ್ರತಿ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ, ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ ಅಥವಾ ಮಧ್ಯಕ ಅಥವಾ ಬಹುಳಕದಿಂದ ಸರಾಸರಿ ಎಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸರಾಸರಿ ವಿಚಲನ ಮಾಪಕವನ್ನು ಆಧಾರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ವಿಚಲನ ಮಾಪಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಸರಾಸರಿ ವಿಚಲನ ಮಾಪಕವನ್ನು, ಫಸ್ಟ್ ಮೊಮೆಂಟ್ ಆಫ್ ಡಿಸ್ ಪರ್ಷನ್ (First moment of dispersion) ಎಂದು ಸಹ ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ವೈಯಕ್ತಿಕವಾಗಿ ಗಮನಿಸಲಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿ

ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ ಯಿಂದ ಸರಾಸರಿ ವಿಚಲನ $\delta_{\overline{X}} = a + \frac{\Sigma| fd\overline{X}}{\Sigma f}\,\delta$

ಮಧ್ಯಕದಿಂದ ಸರಾಸರಿ ವಿಚಲನ $\delta_M = \frac{\Sigma| fd\overline{X}|}{\Sigma f}$

ಬಹುಳಕದಿಂದ ಸರಾಸರಿ ವಿಚಲನ $\delta_Z = \frac{\Sigma| fdZ|}{\Sigma f}$

ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ವೈಯಕ್ತಿಕವಾಗಿ ಗಮನಿಸಲಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿ

ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಗೆ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯಿಂದ ಸರಾಸರಿ ವಿಚಲನ ಮಾಪಕವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಹಾಗೂ ಮಧ್ಯಕದಿಂದ ಸರಾಸರಿ ವಿಚಲನ ಮಾಪಕ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಂಖ್ಯೆ :X :4800, 4600, 4400, 4200, 4000

X	$\lvert d\overline{X}\rvert$	$\lvert dM\rvert$
4800	400	400
4600	200	200
4400	0	0
4200	200	200
4000	400	400
$\sum x = 22{,}000$	$\sum\lvert d\bar{x}\rvert = 1200$	$\sum\lvert dM\rvert = 1200$

$$\delta M = \frac{\sum |d\overline{X}|}{N}$$

$$= \frac{1200}{5}$$

$$= 240$$

ಮಧ್ಯಕ $= \frac{N+1}{2} = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$ ನೇ ಸಂಖ್ಯೆ $= 4400$

$$\delta M = \frac{|dM|}{N}$$

$$= \frac{1200}{5} = 240$$

ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಪಡೆಯುವ ಶ್ರೇಣಿ

ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯಿಂದ, ಸರಾಸರಿ ವಿಚಲನ ಮಾಪಕ

ಅಪಘಾತ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಪಘಾತಕ್ಕೊಳಗಾಗಿರುವವರಸಂಖ್ಯೆ

X	f	dx	fdx	$\lvert d\bar{x} \rvert$	$fd\lvert\bar{x}\rvert$
0	15	-2	-30	3	45
1	16	-1	-16	2	32
2	21	0	0	1	21
3	10	1	10	0	0
4	17	2	34	1	17
5	8	3	24	2	16
6	4	4	16	3	12
7	2	5	10	4	8
8	1	6	6	5	5
9	2	7	14	6	12
10	2	8	16	7	14
11	0	9	0	8	0
12	2	10	20	9	18
	f = 100		104		200

$$a + \frac{\sum fdx}{\sum f}$$

$$= 2 + \frac{140}{100}$$

$$= 2 + 1.04$$

$$\overline{x} = 3.04 \quad or \quad 3$$

ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯಿಂದ, ಸರಾಸರಿ ವಿಚಲನ ಮಾಪಕ

$$\delta \bar{x} = \frac{|f.d\bar{x}|}{\sum f} = \frac{200}{100} = 2$$

ಅಪಘಾತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ x	ಅಪಘಾತಕ್ಕೊಳಗಾಗಿರುವವರ ಸಂಖ್ಯೆ f	ಸಂಚಿತ ಆವರ್ತ C.f
0	15	15
1	16	31
2	21	52
3	10	62
4	17	79
5	8	87
6	4	91
7	2	93
8	1	94
9	2	96
10	2	98
11	0	90
12	2	100
	$\Sigma f = 100$	

ಮಧ್ಯಕ= $\frac{N+1}{2} = \frac{101}{2} = 50.2$ ಆದ್ದರಿಂದ ಮಧ್ಯಕ = 2

(x)	(f)	$\|(dM)\|_{(2)}$	(fdM)
0	15	2	30
1	16	1	16
2	21	0	0
3	10	1	10
4	17	2	34
5	8	3	24
6	4	4	16
7	2	5	10
8	1	6	6
9	2	7	14
10	2	8	16
11	0	9	0
12	2	10	20
	N = 100		Σ|fdM|=196

ಮಧ್ಯಕದ ಬೆಲೆ = 2

ಸರಾಸರಿ ವಿಚಲನ $= \delta M = \dfrac{\sum |fdM|}{N} = \dfrac{196}{100} = 1.96$

ಸರಾಸರಿ ವಿಚಲನ ಗುಣಾಂಕ $= \dfrac{1.96}{2} X100 = 0.93 X100 = 93$

ವರ್ಗಾಂತರ	f	cf	x	dx	|dx|	f|dx|
0-10	5	5	5	-30	-3	-15
10-20	8	13	15	-20	-2	-16
20-30	7	20	25	-10	-1	-7
30-40	12	32	35	0	0	0
40-50	28	60	45	10	1	28
50-60	20	80	55	20	2	40
60-70	10	90	65	30	3	30
70-80	10	100	75	40	4	40
	Σ f = 100					Σ fdx= 100

$$35 + \frac{100}{100} X 10 = 35 + 10$$

$$\overline{X} = 45$$

$$: m_1 = \frac{100 + 1}{2} = \frac{101}{2} = 50.5$$

$$M = 40 + \frac{50 - 40}{28}(50.5 - 32)$$

$$= 40 + \frac{10}{28}(18.5)$$

$$= 40 + \frac{185}{28} = 40 + 6.44$$

$$M = 46.44 \text{ or } 47 \therefore \overline{X} = 45$$

$$Mode = 3(46.44) - 2(45)$$

$$= 139.32 - 90 = 49.32 \text{ or } 50$$

$$M = 46.44 \text{ or } 47$$

$$Z = 49.32 \text{ or } 50$$

ವರ್ಗಾಂತರ	f	x	$dx_{(45)}$	$f \mid dx \mid$
0-10	5	5	40	200
10-20	8	15	30	240
20-30	7	25	20	140
30-40	12	35	10	120
40-50	28	45	0	000
50-60	20	55	10	200
60-70	10	65	20	200
70-80	10	75	30	300
	$\Sigma f = 100$			$\Sigma fd'x = 100$

ವರ್ಗಾಂತರ	f	x	$dx_{(47)}$	$f \mid dx \mid$
0-10	5	5	42	210
10-20	8	15	32	256
20-30	7	25	22	154
30-40	12	35	12	144
40-50	28	45	2	56
50-60	20	55	8	160
60-70	10	65	18	180
70-80	10	75	28	280
	$\Sigma f = 100$			$\Sigma f\mid dx\mid = 1440$

ವರ್ಗಾಂತರ	f	x	$dx_{(50)}$	$f \mid dx \mid$
0-10	5	5	45	215
10-20	8	15	35	280
20-30	7	25	25	175
30-40	12	35	15	180
40-50	28	45	5	140
50-60	20	55	5	100
60-70	10	65	15	150
70-80	10	75	25	250
	$\Sigma f = 100$			$\Sigma f'dx = 1500$

$$\delta x = \frac{\sum f|dx|x}{\sum f} = \frac{1400}{100} = 14$$

$$= \delta m = \frac{\sum |fd|m}{\sum f} = \frac{1440}{100} = 14.40$$

$$= \delta z = \frac{\sum |fdx|z}{\sum f} = \frac{1500}{100} = 15$$

ಸರಾಸರಿಯಿಂದ ವಿಚಲನ ಮಾಪಕದ ಗುಣಾಂಕ $= \frac{\delta \overline{X}}{\overline{X}} = \frac{14}{45} = 0.31$

ಮಧ್ಯಕದಿಂದ ವಿಚಲನ ಮಾಪಕದ ಗುಣಾಂಕ $= \frac{\delta M}{M} = \frac{14.4}{45} = 0.32$

ಬಹುಕದಿಂದ ವಿಚಲನ ಮಾಪಕದ ಗುಣಾಂಕ $= \frac{\delta Z}{Z} = \frac{15}{49.32} = 0.30$

ನಿಮ್ಮ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಪಶೀಲಿಸಿ.

ಪರಿಮಿತಿ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿ. ಇದರ ಅನುಕೂಲಗಳೇನು

ಕೆಳಗಿನ ನ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಚತುರ್ಥಕ ವಿಚಲನವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿ

ವರ್ಗಾಂತರ :	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
ಆವರ್ತ :	5	15	25	40	10

20.9 ಸರಾಸರಿ ವಿಚಲನ ಮಾಪನದ ಅನುಕೂಲಗಳು ಮತ್ತು ಅನಾನುಕೂಲಗಳು.

ಅನುಕೂಲಗಳು:

(1) ಸರಾಸರಿ ವಿಚಲನ ಮಾಪಕ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯ ಎಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಲನ್ನು ಗಮನಕ್ಕೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.

(2) ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ, ಮಧ್ಯಕ ಮತ್ತು ಬಹುಳಕಗಲಿಂದ ಸರಾಸರಿ ವಿಚಲನ ಮಾಪಕವನ್ನು ಲಕ್ಕ ಹಾಕುವುದು ಸಾಧ್ಯ

(3) ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯ ತೀವ್ರ ಮೌಲ್ಯಗಳಿಂದ ಅದು ಪ್ರಭಾವಿತವಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಅನಾನುಕೂಲಗಳು:

(1) ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಸರಾಸರಿಗಳಿಂದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವುದುಸರಾಸರಿ ವಿಚಲನಮಾಪಕದ ದೌರ್ಬಲ್ಯ. ಇದನ್ನು ಮಾನಕವಿಚಲನದಲ್ಲಿ ಹೋಗಲಾಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತದೆ.

(2) ಬಹುಳಕದಿಂದ, ಸರಾಸರಿ ವಿಚಲನ ಮಾಪಕ ಉತ್ತಮ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನುನೀಡುವುದಿಲ್ಲ

ಮೇಲಿನ ದೌರ್ಬಲ್ಯಗಳಿದ್ದರೂ (Small Samples) ಸಣ್ಣ ಮಾದರಿಗಳಿಗೆ ವಿಚಲನ ಮಾಪಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವಾಗ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಪಾರ ಆವರ್ತ ಸಿದ್ಧಾಂತದಲ್ಲಿ ಸರಾಸರಿ ವಿಚಲನ ಮಾಪಕವನ್ನು ವ್ಯಾಪಕವಾಗಿ ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

20.10 ಸಾರಾಂಶಿಸೋಣ :

ಈ ಘಟಕದಲ್ಲಿ ನೀವು ಪರಿಮಿತಿ ವಿಚಲನ, ಚತುರ್ಥಕ ವಿಚಲನ, ಮತ್ತು ಸರಾಸರಿ ವಿಚಲನ ಮಾಪಕದ ಅರ್ಥವಿವರಣೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡುವ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಅರಿತುಕೊಂಡಿದ್ದೀರಿ. ವಿಚಲನ ಮಾಪಕವನ್ನು ನಿರಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ಮತ್ತು ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ಅಳತೆ ಅಳತೆ ಮಾಡಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ಸಹ ನೋಡಿದ್ದೀರಿ. ಈ ಮೂರು ವಿಚಲನ ಮಾಪಕಗಳ ಅನುಕೂಲಗಳು ಮತ್ತು ಅನಾನುಕೂಲಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಸಾರಾಂಶಿಸಲಾಗಿದೆ.

(1) ಪರಿಮಿತಿ ವಿಚಲನ (Range) H-L

(2) ಪರಿಮಿತಿ ವಿಚಲನ ಗುಣಾಂಕ (Co efficient of Range) $= \frac{H-L}{H+L}$

(3) ಚತುರ್ಥಕ ವಿಚಲನ (emi inter Quantice Range or quantile deviations) $= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

(4) ಚತುರ್ಥಕ ವಿಚಲನ ಗುಣಾಂಕ $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

(5) ಸರಾಸರಿ ವಿಚಲನ ಮಾಪಕ ವೈಯಕ್ತಿಕವಾಗಿ ಗಮನಿಸಲಾಗಿರುವ ಶ್ರೇಣಿಗೆ(Mean deviations)

(i) ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯಿಂದ ವಿಚಲನ ಮಾಪಕ $= \delta\ \overline{X} = \frac{\sum |d\overline{X}|}{N}$

(ii) ಮಧ್ಯಕದಿಂದ ವಿಚಲನ ಮಾಪಕ $= \delta\ M = \frac{\sum |dM|}{N}$

(iii) ಬಹುಳಕದಿಂದ ಸರಾಸರಿ ವಿಚಲನ $= \delta\ Z = \frac{|dZ|}{N}$

(6) ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಶ್ರೇಣಿ ಮತ್ತು ಸತತ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಗಳಿಗೆ

$$= \frac{\sum |f.d\overline{x}|}{\sum f}$$

$$\delta M = \frac{\sum |fdM|}{\sum f}$$

$$\delta Z = \frac{\sum |fdZ|}{\sum f}$$

(7) ಸರಾಸರಿ ವಿಚಲನ ಮಾಪಕದ ಗುಣಾಂಕ

(i) ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯಿಂದ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲಾದ ಸರಾಸರಿ ವಿಚಲನ ಮಾಪಕ ಗುಣಾಂಕ $= \frac{\delta\overline{X}}{\overline{X}}$

(ii) ಮಧ್ಯಕದಿಂದ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲಾದ ಸರಾಸರಿ ವಿಚಲನ ಮಾಪಕ ಗುಣಾಂಕ $= \frac{\delta M}{M}$

(iii) ಬಹುಳಕದಿಂದ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲಾದ ಸರಾಸರಿ ವಿಚಲನ ಮಾಪಕ ಗುಣಾಂಕ $= \frac{\delta Z}{z}$

20.11 ಸ್ವ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

(1) ಚತುರ್ಥಕ ವಿಚಲನ ಮಾಪಕ ಎಂದರೇನು ? ಅದರ ಅನುಕೂಲಗಳು ಮತ್ತು ಅನಾನುಕೂಲಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಿ

(2) ಕೆಳಗಿನ ನ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಚತುರ್ಥಕ ವಿಚಲನ ಮಾಪಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿ

ವರ್ಗಾಂತರ :	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
ಆವರ್ತ:	4	12	16	22	10	8

(3) ಕೆಳಗಿನ ನ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಮಧ್ಯಕದಿಂದ ಸರಾಸರಿ ವಿಚಲನ ಮಾಪಕವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವರ್ಗಾಂತರ:	0-9	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59
ಆವರ್ತ:	15	36	53	42	17	2

20.12 ಮುಖ್ಯ ಪರಿಭಾವನೆಗಳು

(1) ವಿಚಲನ ಮಾಪಕ
(2) ಪರಿಮಿತಿ
(3) ವಿಚಲನ ಮಾಪಕ ಗುಣಾಂಕ
(4) ಚತುರ್ಥಕ ವಿಚಲನ ಮಾಪಕ
(5) ಸರಾಸರಿ ವಿಚಲನ ಮಾಪಕ

20.13 ಮುಂದಿನ ಓದಿಗಾಗಿ

D.N. Elhance : Fundamentals of Statistics, Kitab mahal New delhi ಅಧ್ಯಾಯ 9

ಘಟಕ -21
ಮಾಪಕ ವಿಚಲನ
(Standard deviation)

21.1 ಪೀಠಿಕೆ

21.2 ಮಾನಕ ವಿಚಲನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

21.3 ಮಾಪನ ವಿಚಲನದ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ

21.4 ವೇರಿಯನ್ಸ್ ಮತ್ತು ಕೋಎಫಿಂಷಿಯಯೆಂಟ್ ಆಪ್ ವೇರಿಯೇರ್ಷ

21.5 ನಿಮ್ಮ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ

21.6 ಮಾನಕ ವಿಚಲನದ ಅನುಕೂಲಗಳು ಮತ್ತು ಅನಾನುಕೂಲಗಳು

21.7 ಲಾರೆಂಜ್ ರೇಖೆ

21.8 ಗಿನಿಸ್ ಗುಣಾಂಕ

21.9 ಸಾರಾಂಶಿಸೋಣ

21.10 ಸ್ವ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

21.11 ಮುಂದಿನ ಓದಿಗಾಗಿ.

21.1 ಪೀಠಿಕೆ:

ಹಿಂದಿನ ಯೂನೀಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನಾವು ಪರಿಮಿತಿ (Range) ಚತುರ್ಥಕ(Semi - inter quantite Range or Quartile deviation) ಮತ್ತು ಸರಾಸರಿ ಮಾಪಕ ವಿಚಲನ (Mean Deviation)ಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯ ಮಾಡಿಕೊಂಡೆವು. ವಿಚಲನ ಮಾಪಕಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ಅತ್ಯಂತ ಮುಖ್ಯವಾದುದು ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಂತ ಹೆಚ್ಚು ವ್ಯಾಪಕವಾಗಿ ಬಳಕೆಯಾಗುವ ವಿಚಲನ ಮಾಪಕವೆಂದರೆ ಮಾಪಕ ವಿಚಲನ (Standard deviations). ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನಾವು ಇದನ್ನು ಪರಿಚಯಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಮಾನಕ ವಿಚಲನಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಎರಡು ಪರಿಭಾವನೆಗಳೆಂದರೆ, ಮೊದಲನೆಯದು ವೇರಿಯನ್ಸ್(Variance) ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದು ಕೊಎಫಿಷಿಯೆಂಟ್ ಆಫ್ ವೇರಿಯೇಷನ್,(Coefficient of variation) ಎರಡನೆಯ ಪರಿಭಾವನೆ ಮಾನಕ ವಿಚಲನಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಸಾಪೇಕ್ಷ ವಿಚಲನ ಮಾಪಕ

ಮಾನಕ ವಿಚಲನದ ಜೊತೆಗೆ, ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನಾವು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವ ಮತ್ತೊಂದು ವಿಚಲನ ಮಾಪಕ ಲಾರೆಂಜ್ ರೇಖೆ. ಇದು ನಕ್ಷೆಯ ಮೂಲಕ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯ ವಿಚಲನವನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಇದು ಸಹ ತುಂಬಾ ಪ್ರಖ್ಯಾತವಾದ ವಿಚಲನ ಮಾಪಕ

21.2 ಮಾನಕ ವಿಚಲನದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

ಮಾನಕ ವಿಚಲನವನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾ ಶ್ರೇಣಿಯ ಪ್ರತಿ ಸಂಖ್ಯೆ, ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯಿಂದ ಎಷ್ಟು ದೂರವಿದೆ ಎಂದು ಕಂಡು ಹಿಡಿದು, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಯವನ್ನು ಸರಾಸರಿಯಿಂದ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿ, ಅದರ ವರ್ಗಮೊತ್ತವನ್ನು ಪಡೆದು ಆ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯ, ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ವರ್ಗಮೂಲವೆಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಸರಳವಾಗಿ ಇದನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರದಿಂದ ಹೇಳಬಹುದು.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{N}}$$

ಇಲ್ಲಿ σ — ಮಾನಕ ವಿಚಲನ δ

$\sum d^2$ = ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಸರಾಸರಿಯಿಂದ ಎಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿದೆ ಎನ್ನುವುದರ ವರ್ಗದ ಮೊತ್ತ.

N = ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

21.3: ಮಾನಕ ವಿಚಲನದ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ

ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರಗಳ ಮೂಲಕ ಮಾನಕ ವಿಚಲನ, ವೇರಿಯನ್ಸ್ ಮತ್ತು ಕೋಎಫಿಷಿಯೆಂಟ್ ಆಫ್ ವೇರಿ,ಯೇಷನ್‌ಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲಾಗುತ್ತದೆ.

(1) ವೈಯಕ್ತಿಕವಾಗಿ ಗಮನಿಸಲಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿ

ಮಾನಕ ವಿಚಲನ- $\sigma = \sqrt{\frac{\sum dx^2}{N}}$

ವೇರಿಯನ್ಸ್ $= \sigma d^2 =$

- ಕೋಎಫಿಷಿಯೆಂಟ್ ಆಫ್ ವೇರಿಯೇಷನ್ = $\frac{\sigma}{X}$ $\overline{X}$

(ii) ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಪಡೆಯುವ ಶ್ರೇಣಿ ಮತ್ತು ಸತತ ಸಂಖ್ಯಾ ಶ್ರೇಣಿ $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fdx^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fdx}{\sum f}\right)^2} \; x \; i$

ವೇರಿಯನ್ಸ್ $= \sigma^2$

ಕೋಎಫಿಷಿಯೆಂಟ್ ಆಫ್ ವೆರಿಯೇಷನ್ $= \frac{\sigma}{\overline{X}} \times 100$

ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ಅಂಶ: ಯಾವುದೇ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಕೋಎಫಿಷಿಯೆಂಟ್ ಆಫ್ ವೇರಿಯೇಷನ್ ಕಡಿಮೆ ಇದ್ದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯಾ ಶ್ರೇಣಿ ಹೆಚ್ಚು ದೃಢವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಕೋಎಫಿಷಿಯೆಂಟ್ ಆಫ್ ವೆರಿಯೇಷನ್ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಶ್ರೇಣಿ ಕಡಿಮೆ ದೃಢವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬೇಕು. ಮುಂದೆ ನಾವು ನೋಡುವಂತೆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಹೋಲಿಸಬೇಕಾದಾಗ ಕೋಎಫಿಷಿಯೆಂಟ್ ಆಫ್ ವೆರಿಯೇಷನ್ ತುಂಬಾ ಸಹಾಯಕವಾಗುತ್ತದೆ.

ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಮಾನಕ ವಿಚಲನ, ವೇರಿಯನ್ಸ್ ಮತ್ತು ಕೋಎಫಿಷಿಯೆಂಟ್ ಆಫ್ ವೆರಿಯೇಷನ್‌ಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲಾಗಿದೆ.

<u>ವೈಯಕ್ತಿಕ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿ</u>

ಕೆಳಗಿನ ನ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಸ್ಟಾಂಡರ್ಡ್‌ಡೀವಿಯೇಷನ್ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕೋಣ.

10 ಹುಡುಗರ ಎತ್ತರ(ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರ್‌ನಲ್ಲಿ)

160, 160, 161, 162, 163, 163, 163, 164, 164, 170

(X)	(d)	(dx^2)
160	-3	9
160	-3	9
161	-2	4
162	-1	1
163	0	0
163	0	0
163	0	0
164	+1	1
164	+1	1
170	+7	49
$\sum X = 1630$		$\Sigma dx^2 = 74$

ಸರಾಸರಿ = $\overline{X} = \frac{\Sigma x}{N}$

ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ = $\sqrt{\frac{\Sigma dx^2}{N}} = \sqrt{\frac{74}{10}} = 2.72$

ವೇರಿಯನ್ಸ್ = $\sigma^2 = 7.3984$

ಕೋ ಎಫಿಷಿಯೆಂಟ್ ಆಪ್ ವೆರಿಯೇಷನ್ $= \frac{\sigma}{\overline{X}} \ x \ 100$

$$\overline{X} = \frac{\Sigma x}{N} = \frac{1630}{10} = 163$$

$$= \frac{2.72}{163} \ X \ 100$$

$$= 1.6687$$

ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಪಡೆಯುವ ಶ್ರೇಣಿ ಮತ್ತು ಸತತ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿ

ಸೂತ್ರ:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fdx^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fdx}{\sum f}\right)^2} \ x \ i$$

ಇಲ್ಲಿ $\sigma =$ ಮಾನಕ ವಿಚಲನ

$\Sigma fdx^2 = f$ ಮತ್ತು dx^2 ಗುಣಲಬ್ಧದ ಮೊತ್ತ

$\Sigma fdx = f$ ಮತ್ತು dx ಗುಣಲಬ್ಧದ ಮೊತ್ತ

$\Sigma f =$ ಆವರ್ತದ ಮೊತ್ತ

<u>ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.</u>

ಕೆಳಗಿನ ಮಾಹಿತಿ, ಒಂದು ಉದ್ಯಮದಲ್ಲಿ ಕಾರ್ಮಿಕರು ಉತ್ಪಾದಿಸಿರುವ ವಸ್ತುಗಳ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು ಮಾನಕ ವಿಚಲನವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕೋಣ

ಸರಕುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ಕಾರ್ಮಿಕರ ಸಂಖ್ಯೆ				
X	(f)	$dx_{(22)}$	f.dx	$(dx)^2$	fdx^2
18	3	-4	-12	16	48
19	7	-3	-21	9	63
20	11	-2	-22	4	44
21	14	-1	-14	1	14
22	18	0	0	0	0
23	17	1	17	1	17
24	13	2	26	4	52
25	8	3	24	9	72
26	5	4	20	16	80
27	4	5	20	25	100
	$\Sigma f = 100$		$\Sigma fdx = +38$	$\Sigma fdx2 = 490$	

$$= a + \frac{\sum fdx}{\sum f} = 22 + \frac{38}{100} = 22.38$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fdx^2 - N\left(\overline{X} - A\right)^2}{N}}.$$

$$= \sqrt{\frac{490 - 100(0.38)^2}{100}} = \sqrt{4.756}$$

= 2.2 ಸರಕು

ಉದಾಹರಣೆ2:

ಪಾರ್ಲಿಮೆಂಟಿನ 542 ಸದಸ್ಯರ ವಯಸ್ಸಿನ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಮಾನಕ ವಿಚಲನವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕೋಣ:

ವಯಸ್ಸು(ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	ಸದಸ್ಯರ ಸಂಖ್ಯೆ
20-30	3
30-40	61
40-50	132
50-60	153
60-70	140
70-80	51
80-90	2
	$\Sigma f = 542$

ವಯಸ್ಸು ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ವರ್ಗಾಂತರ	ಮಧ್ಯದ ಬೆಲೆಗಳು X	f	dx	d'x	f.d'x	f.d'x2
20-30	25	3	-30	-3	-9	27
30-40	35	61	-20	-2	-122	244
40-50	45	132	-10	-1	-132	132
50-60	55	153	0	0	0	0
60-70	65	140	10	1	140	140
70-80	75	51	20	2	102	204
80-90	85	2	30	3	6	18
		f = 542			-15	765

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f d' x^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma f d' x}{\Sigma f}\right)^2} X \ i$$

$$= \sqrt{\frac{765}{542} - \left(\frac{15}{542}\right)^2} X\,10$$

$$= \sqrt{(1.41 - (0.0005))} \ X \ 10$$

$$= 1.16 X 10$$

= 11.6ವರ್ಷಗಳು

ಉದಾಹರಣೆ:ಎರಡು ಮಾದರಿ ಟೈರ್‌ಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದಾಗ ಕೆಳಗಿನ ಮಾಹಿತಿ ದೊರೆತಿದೆ.

ಜೀವನಾವಧಿ (ಸಾವಿರ ಮೈಲುಗಳಲ್ಲಿ)	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50
ಮಾದರಿ x	8	15	12	18	13	0
ಮಾದರಿ y	6	20	32	30	12	1

ನೀವು ಯಾವ ಮಾದರಿ ಟೈರುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವಿರಿ ?

ಎರಡು ಟೈರುಗಳಿಗೆ ಮಾನಕ ವಿಚಲನವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ

ವರ್ಗಾಂತರ	ಆವೃತ್ತಿ(x)	ಆವೃತ್ತಿ (y)	x	dx	d'x
20-25	8	6	22.5	-10	-2
25-30	15	20	27.5	-5	-1
30-35	12	32	32.5	0	0
35-40	18	30	37.5	5	1
40-45	13	12	42.5	10	2
45-50	0	1	47.5	15	3
	66	101			

fxd'x	fxd'y	fxd^1X^2	$fyd'y^2$
-16	-12	32	+24
-15	-20	15	+20
0	0	0	0
18	30	18	30
25	24	52	48
0	2	0	9
13	25	127	131

$$\sqrt{\frac{\Sigma fd'x^2}{\Sigma f}-\left(\frac{\Sigma fd'x}{\Sigma f}\right)^2} X \ i$$

$$=\sqrt{\frac{127}{66}-\left(\frac{31}{66}\right)^2}$$

$$=\sqrt{1.92-00.4} X 5$$

$$\sigma X=\sqrt{1.88} X\ 5=1.37 x\ 5=6.85$$

$$\sigma y=\sqrt{\frac{131}{101}-\left(\frac{25}{101}\right)}=\sqrt{1.30-0.25} X\ 5$$

$$=\sqrt{1.05}\ X\ 5$$

$$=1.02 X\ 5$$

$$\sigma y=5.10$$

ಇವೆರಡು ಟೈರುಗಳ ನಡುವೆ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು, ವ್ಯತ್ಯಯ ಸಹ ಗುಣಕವನ್ನು ಕೋಎಫಿಷಿಯೆಂಟ್ ಆಫ್ ವೇರಿಯೇಷನ್ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬೇಕು.

X ನ ವ್ಯತ್ಯಯ ಸಹ ಗುಣಕ $= \frac{\sigma}{\overline{X}} X \cdot 100$

X ನ ಸರಣಿಗೆ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ

$$\overline{X} = a + \frac{\sum fdx}{\sum f} X\ i$$

$$= 32.5 + \frac{13}{66} = 32.5 + 0.98$$

$$\bar{x} = 33.48$$

X ನ ವ್ಯತ್ಯಯ ಸಹಗುಣಕ $= \left[\frac{\sigma}{x} X\ 100\right]$

X ನ ವ್ಯತ್ಯಯ ಸಹಗುಣಕ $= \frac{685}{33\ .85}\ X\ \ 100$

X ನ ವ್ಯತ್ಯಯ ಸಹಗುಣಕ $= 20.5$

Y ನ ಸರಣಿಗೆ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ

$$\bar{y} = a + \frac{\Sigma fd^1 y}{\Sigma f} X\ i$$

$$= 32.5 + \frac{25}{101} X\ 5$$

$$= 32.0 + \frac{125}{101} = 32.5 + 1.24$$

$$\bar{y} = 33.74$$

X ನ ವ್ಯತ್ಯಯ ಸಹಗುಣಕ $= \frac{\sigma}{\overline{Y}}\ X\ 100$

$$\frac{5.10}{33.74}\ X\ 100 = 15.10$$

Yನ ಸರಣಿಯ ವ್ಯತ್ಯಯದ ಸಹಗುಣಕ Xಸರಣಿಯ ವ್ಯತ್ಯಯ ಸಹಗುಣಕಕ್ಕಿಂತ ಕಮ್ಮಿಯಿರುವುದರಿಂದ yಮಾದರಿ ಟೈರನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

21.5 ನಿಮ್ಮ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ

(1) ಮಾನಕ ವಿಚಲನ ಎಂದರೇನು? ಇದನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವುದು ಹೇಗೆ?

(2) ವೇರಿಯನ್ಸ್ ಮತ್ತು ಕೊಎಫಿಷಿಯೆಂಟ್ ಆಫ್ ವೇರಿಯಷ್‌ನ್ ಎಂದರೇನು?

(3) ಕೆಳಗಿನ ನ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಮಾನಕ ವಿಚಲನ, ವೇರಿಯನ್ಸ್ ಮತ್ತು ಕೊಎಫಿಷಿಯೆಂಟ್ ಆಫ್ ವೇರಿಯೇಷನ್ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿ.

ಕ್ರಿಕೆಟ್ ಮ್ಯಾಚ್‌ನಲ್ಲಿ ಗಳಿಸಿದ ರನ್‌ಗಳು X:

15, 0, 64, 50, 102, 110, 30, 60,5, 10

21.6 ಮಾನಕ ವಿಚಲನದ ಅನುಕೂಲಗಳು ಮತ್ತು ಅನಾನುಕೂಲಗಳು

ಅನುಕೂಲಗಳು

1. ಮಾನಕ ವಿಚಲನವನ್ನು ಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಕರಾರುವಕ್ಕಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆ.
2. ಶ್ರೇಣಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯಿಂದ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾಗ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಸಹ ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಅನುಕೂಲ ಸರಾಸರಿ ವಿಚಲನ ಮಾಪಕಕ್ಕಿಲ್ಲ.
3. ಸಂಖ್ಯಾ ಶ್ರೇಣಿಯ ಎಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗಣನೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.
4. ಮಾನಕ ವಿಚಲನ ಮಾದರಿಯಿಂದ ಮಾದರಿಗೆ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಅನುಭವಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

ಅನಾನುಕೂಲಗಳು

1. ಮಾನಕ ವಿಚಲನದ ಅಂಕಗಣಿತ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ರಚಿತವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯ ಎಲ್ಲ ದೌರ್ಬಲ್ಯಗಳೂ ಇದರಲ್ಲಿಯೂ ಅಡಕವಾಗಿದೆ.

2. ಮಾನಕ ವಿಚಲನದ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಕಷ್ಟ ಏಕೆಂದರೆ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬೇಕು.

ಮೇಲಿನ ದೌರ್ಬಲ್ಯಗಳಿದ್ದರೂ, ಮಾನಕ ವಿಚಲನ ಅತ್ಯಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಬಳಸಲ್ಪಡುವ ಮಾನಕ ವಿಚಲನ. ಇದರ ಗಣಿತೀಯ ಗುಣಗಳಿಂದಾಗಿ ಇದು ಹೆಚ್ಚು ಪ್ರಚಾರ ಪಡೆದಿದೆ.

21.7 ಲಾರೆಂಜ್ ರೇಖೆ

ಇಟಾಲಿಯನ್ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ಮ್ಯಾಕ್ಸ್. ಬಿ. ಲಾರೆಂಜ್ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಪಡಿಸಿರುವ ರೇಖೆ, ಅಳತೆ ರೇಖೆ ವಿಚಲನ ಮಾಪಕವನ್ನು ನಕ್ಷಾ ವಿಧಾನದ ಮೂಲಕ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಲಾರೆಂಜ್ ಆದಾಯ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಲು ಇದನ್ನು ಪ್ರಥಮ ಬಾರಿಗೆ ಬಳಸಿದ. ಆದರೆ ಇಂದು ಯಾವುದೇ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಅಳತೆಮಾಡಲು ಇದನ್ನು ಬಳಸಲಾಗುತ್ತಿದೆ. ಲಾರೆಂಜ್ ರೇಖೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕ್ರಮದ ಮೂಲಕ ರಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಲಾರೆಂಜ್ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎರಡು ಚಲಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ, ರಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

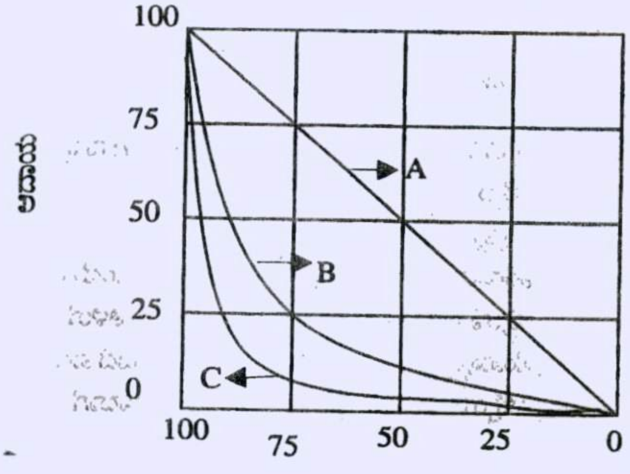
1. ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯ ಎರಡೂ ಚಲಗಳ ಸಂಚಿತ ಆವರ್ತವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಅವುಗಳನ್ನು ಶೇಕಡಾಂಶವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.
2. X -ಅಕ್ಷ, 100ರಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗಿ 0ಗೆ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.
3. Y -ಅಕ್ಷ, 0ಯಿಂದಪ್ರಾರಂಭವಾಗಿ 100ಕ್ಕೆ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.
4. 100 ಮತ್ತು 0ಯನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ಸಮ ವಿತರಣೆ ರೇಖೆ(equal distribution line)ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಲಾರೆಂಜ್ ರೇಖೆ ಸಮವಿತರಣೆಯಿಂದ ದೂರವಿದ್ದಷ್ಟೂ, ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಅಸಮಾನತೆ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬೇಕು. ಹಾಗೆಯೇ ಲಾರೆಂಜ್ ರೇಖೆ, ಸಮವಿತರಣೆ ರೇಖೆಗೆ ಹತ್ತಿರವಿದ್ದಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿ ಹೆಚ್ಚು ಸಮಾನತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬೇಕು.
5. ಎರಡೂ ಸಂಚಿತ ಶೇಕಡಾಂಶ ಆವರ್ತದ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಮೂಡಿಸಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ರೇಖೆಯೇ ಲಾರೆಂಜ್ ರೇಖೆ.

ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಕೆಳಗಿನ ನ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಲಾರೆಂಜ್ ರೇಖೆ ರಚಿಸೋಣ.

ಆದಾಯ ಸಾವಿರರೂಗಳಲ್ಲಿ	ಜನರ ಸಂಖ್ಯೆ 000ದಲ್ಲಿ Aಗುಂಪು	Bಗುಂಪು	Cಗುಂಪು
10	5	8	15
20	10	7	6
40	20	5	2
50	25	3	1
80	40	2	1

ಆದಾಯ				Aಗುಂಪು			Bಗುಂಪು			Cಗುಂಪು	
ರೂಸಂಚಿತ 000ದಲ್ಲಿ	ಸಂಚಿತ ಆದಾಯ	ಸಂಚಿತ ಆದಾಯದ ಶೇಕಡಾಂಶ	ಜನರ ಸಂಖ್ಯೆ (000ದಲ್ಲಿ)	ಸಂಚಿತ ಸಂಖ್ಯೆ	ಸಂಚಿತ ಶೇಕಡಾಂಶ	ಜನರ ಸಂಖ್ಯೆ (000ದಲ್ಲಿ)	ಸಂಚಿತ ಸಂಖ್ಯೆ	ಸಂಚಿತ ಶೇಕಡಾಂಶ	ಜನರ ಸಂಖ್ಯೆ (000ದಲ್ಲಿ)	ಸಂಚಿತ ಸಂಖ್ಯೆ	ಸಂಚಿತ ಶೇಕಡಾಂಶ
10	10	5	5	5	5	8	8	32	15	15	60
20	30	15	10	15	15	7	15	60	6	21	84
40	70	35	20	35	35	5	20	80	2	23	92
50	120	60	25	60	60	3	23	92	1	24	96
80	200	100	40	100	100	2	25	100	1	25	100



ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವ ಅಂಶವೇಂದರೆ, Aಗುಂಪಿನವರಲ್ಲಿ ಆದಾಯ ವಿತರಣೆ ಪ್ರಮಾಣಾನುಗತವಾಗಿ ಸಮನಾಗಿದೆ. ಶೇ 5ರಷ್ಟುಜನ ಶೇ50ಆದಾಯವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದಾರೆ. ಶೇ 15ರಷ್ಟು ಜನ ಶೆ15ರಷ್ಟು ಆದಾಯವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದಾರೆ. ಇದು ಸಮಾನ ವಿತರಣೆ ರೇಖೆಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. B ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ ಆದಾಯ ವಿತರಣೆ ಅಸಮಾನವಾಗಿದೆ. ಶೇ 8ರಷ್ಟು ಜನ ಶೇ32ರಷ್ಟು ಆದಾಯವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. Cಗುಂಪಿನ ವಿತರಣೆಗೆ ಇನ್ನೂ ವಿಷಮತೆಯಿಂದ ಕೂಡಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಶೇ15 ರಷ್ಟು ಜನ ಶೇ60ರಷ್ಟು ಆದಾಯವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದಾರೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ವಿಚಲನೆ C ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ A ಗುಂಪಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ ಎನ್ನುವುದುನಕ್ಷೆಯಿಂದ ತುಂಬಾ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ. ಸಮಾನ ವಿತರಣೆಯ ರೇಖೆಯಿಂದ ದೂರವಿದ್ದಷ್ಟೂ ಆದಾಯ ವಿತರಣೆಯ ಅಸಮಾನತೆ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ ಎಂದು ಅರ್ಥ.

ಲಾರೆಂಜ್ ರೇಖೆಯ ಅನುಕೂಲಗಳು ಮತ್ತು ಅನಾನುಕೂಲಗಳು

ಲಾರೆಂಜ್ ರೇಖೆ, ನಕ್ಷಾ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ವಿಚಲನ ಮಾಪಕವನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡುವ ಅತ್ಯುತ್ತಮ ವಿಧಾನ. ನಕ್ಷೆಯಿಂದ ವಿತರಣೆಯ ಸ್ವರೂಪ ತುಂಬಾ ಸುಲಭವಾಗಿ ಎಲ್ಲರಿಗೂ ಅರ್ಥವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದಾಯ ವಿತರಣೆಯ ಅಸಮಾನತೆಗಳನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಲು ಈ ರೇಖೆ ಅತ್ಯುತ್ತಮ ಸಾಧನ.

ಇದರ ಮಿತಿಗಳೆಂದರೆ, ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಚಲಗಳು ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವಾಗ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ವಿದಾನದಿಂದ ಅಳತೆ ಮಾಡುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಜೊತೆಗೆ ನಕ್ಷಾ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ವಿತರಣೆಯ ಕರಾರುವಾಕ್ಕು ಸಂಖ್ಯಾಸ್ವರೂಪ ಲಭ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೂ, ಲಾರೆಂಜ್ ರೇಖೆ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಪಕವಾಗಿ ಬಳಕೆಯಾಗುವ ಒಂದು ಸಾಧನವಾಗಿದೆ.

ಗಿನೀಸ್ ಸರಾಸರಿ ವ್ಯತ್ಯಯ ***(Ginnis Mean difference)***

ಇಟಾಲಿಯನ್ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ಗಿನಿಯ ಅಭಿಪ್ರಾಯವೇಂದರೆ, ವಿಚಲನ ಮಾಪಕವನ್ನು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಮಾಪನದಿಂದ ಅಳೆಯುವುದಕ್ಕಿಂತ, ಕೊಡಲಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿಯೇ ಒಂದೊಂದು ಜೊತೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಆಯ್ದುಕೊಂಡು ಅವುಗಳ ಮೂಲಕ ಸರಾಸರಿ ವ್ಯತ್ಯಯವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು.

ಗಿನಿ ಸೂತ್ರವೇಂದರೆ

ಗಿನಿ ಸರಾಸರಿ ವ್ಯತ್ಯಯ = g/m

ಇಲ್ಲಿ g = ಕೊಡಲಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಲ್ಲದರಲ್ಲಿ ಒಂದೊಂದು ಜೊತೆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ

m = ಎಲ್ಲ ಸಾಧ್ಯ ಜೊತೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ

ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯ ಮೂಲಕ ಇದನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

X: 22, 24, 26, 28, 30

ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜೊತೆಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ

30-22	8	30ರಿಂದ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಮೊತ್ತ -20
30-24	6	
30-26	4	
30-28	2	
28-20	6	28 ರಿಂದ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಮೊತ್ತ -12
28-24	4	
28-26	2	
26-22	4	26 ರಿಂದ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಮೊತ್ತ - 6
26-24	2	
26-22	2	→ 24 ರಿಂದ ವ್ಯತ್ಯಾಸ - 2
		ಒಟ್ಟು - 40

ಒಟ್ಟು ವ್ಯತ್ಯಾಸ = $\frac{1}{2} X \ N(N-1)$

$\frac{1}{2} X \ 5(5-1)$

ಗಿನಿ ಸರಾಸರಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸ = $\frac{40}{10} = 4$

21.9 ಸಾರಾಂಶಿಸೋಣ:

ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನೀವು ತುಂಬಾ ಮುಖ್ಯವಾದ ವಿಚಲನ ಮಾಪಕವಾದ ಮಾನಕ ವಿಚಲನವನ್ನು ಪರಿಚಯ ಮಾಡಿಕೊಂಡಿದ್ದೀರಿ. ಜೊತೆಗೆ, ವೇರಿಯನ್ಸ್ ಕೊಎಫಿಷಿಯೆಂಟ್ ಆಫ್ ವೇರಿಯೇಷನ್ ಲಾರೆಂಜ್ ರೇಖೆ ಮತ್ತು ಗಿನಿಯ ಸರಾಸರಿ ವ್ಯತ್ಯಯವನ್ನು ಕಲಿತಿದ್ದೀರಿ. ಸಾರಾಂಶದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇವುಗಳ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಮಾನಕ ವಿಚಲನ

(1) ವೈಯಕ್ತಿಕವಾಗಿ ಗಮನಿಸಲಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿ $\sigma = \sqrt{\frac{\sum dx^2}{N}}$

(ii) ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಪಡೆಯುವ ಶ್ರೇಣಿ ಮತ್ತು ಸತತ ಸಂಖ್ಯಾ ಶ್ರೇಣಿ $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fdx^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fdx}{\sum f}\right)^2} \ x \ i$

ಹ್ರಸ್ವ ಮಾರ್ಗ $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd'x^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd'x}{\sum f}\right)^2} \ x \ i$

ವೇರಿಯನ್ಸ್ $= \sigma^2$

ಕೋ ಎಫಿಷಿಯೆಂಟ್ ಆಫ್ ವೆರಿಯೇಷನ್ $= \frac{\sigma}{X} X \, 10C$

ಗಿನಿ ಸರಾಸರಿ ವ್ಯತ್ಯಯ $\frac{g}{m}$

21.10 ಸ್ವ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

(1)ಲಾರೆಂಜ್ ರೇಖೆಯ ಅನುಕೂಲಗಳು ಮತ್ತು ಅನಾನುಕೂಲಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಿ.

(2) ಕೆಳಗಿನ ನ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ, ವೇರಿಯನ್ಸ್ ಮತ್ತು ಕೊಎಫಿಷಿಯೆಂಟ್ ಆಫ್ ವೇರಿಯೇಷನ್ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವರ್ಗಾಂತರ:	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
ಆವರ್ತ:	15	40	30	20	5

(3) ಗಿನಿ ಸರಾಸರಿ ವ್ಯತ್ಯಯವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿ

21.11 ಮುಂದಿನ ಓದಿಗಾಗಿ

D.N. Elhance : Fundamentals of Statistics, Kitab mahal New delhi ಅಧ್ಯಾಯ 9

ಘಟಕ -22

ವಿಷಮತೆ ಮತ್ತು ಶೃಂಗತೆ

22.1 ಪೀಠಿಕೆ

22.2 ವಿಷಮತೆ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ

22.3 ಶಿಖರತೆ

22.4 ಸಾರಾಂಶಿಸೋಣ

22.5 ಮುಖ್ಯಪರಿಭಾವನೆಗಳು

22.6 ಸ್ವಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

22.7 ಮುಂದಿನ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ.

ಘಟಕ -22

ವಿಷಮತೆ ಮತ್ತು ಶೃಂಗತೆ

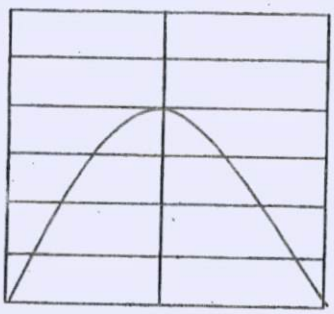
22.1 ಪೀಠಿಕೆ

ನಾವು ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ, ಅದರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಹೊದಿರುತ್ತವೆ. ಕೇಂದ್ರೀಯ ಮಾಪಕದಿಂದ ನಾವು ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿದು, ಅದನ್ನು ಆಧರಿಸಿ, ವಿಚಲನ ಮಾಪಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯ ಚದುರುವಿಕೆ ನಮಗೆ ತಿಳಿದು ಬರುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ನಾವು ಹಿಂದಿನ ಎರಡು ಘಟಕಗಳಲ್ಲಿ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ. ಯಾವುದಾದರು ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಸರಾಸರಿ, ಮಧ್ಯಕ ಮತ್ತು ಬಹುಳಕಗಳು ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿದ್ದರೆ ಅಂತಹ ವಿತರಣೆಯನ್ನು 'ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆ'(Normal Distribution)ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಇವು ಮೂರೂ ಮಾಪಕಗಳೂ ಒಂದೇ ಆಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಚದುರಿರುತ್ತವೆ. ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸರಾಸರಿಯಿಂದ ದೂರ ಇರುತ್ತವೆ. ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ಹತ್ತಿರ ಇರುತ್ತವೆ. ಕೊಡಲಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಅಸಮಾನತೆಗಳಿವೆಎನ್ನುವುದನ್ನು ವಿಷಮತೆ(Skewness)ಅಳತೆ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ವಿತರಣೆಯನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಮೂಡಿಸಿದಾಗ ಅದು ಚೂಪಾಗಿರುತ್ತದೆಯೋ ಅಥವಾ ವಿಶಾಲವಾಗಿ ಹರಡಿಕೊಂಡಿರುತ್ತದೆಯೇ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಶೃಂಗತೆ (Kurtosis) ಅಳತೆ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಇವೆರಡನ್ನೂ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ನೋಡೋಣ

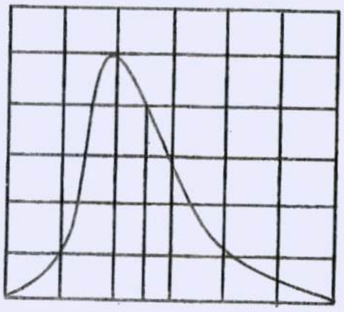
22.2 ವಿಷಮತೆ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ

ಒಂದು ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ ಸರಾಸರಿ , ಮಧ್ಯಕ ಮತ್ತು ಬಹುಳಕಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು 'ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆ' ಎಂದು ಗುರುತಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಮೂಡಿಸಿದಾಗ ಗಂಟೆ ಆಕಾರದ ನಕ್ಷೆ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಚಿತ್ರ1, 2ಮತ್ತು 3ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಒಂದು ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ ಸರಾಸರಿಗಿಂತ, ಮಧ್ಯಕ ಕಡಿಮೆಯಿದ್ದು, ಮಧ್ಯಕಕ್ಕಿಂತ ಬಹುಳಕ ಕಡಿಮೆ ಇದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಧನಾತ್ಮಕ ವಿಷಮತೆ (Positively Sllewed) ಹೊಂದಿರುವ ವಿತರಣೆ ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ, ಒಂದು ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ ಸರಾಸರಿಗಿಂತ ಮಧ್ಯಕ ಹೆಚ್ಚಿದ್ದು, ಮಧ್ಯಕಕ್ಕಿಂತ ಬಹುಳಕ ಹೆಚ್ಚಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು 'ಋಣಾತ್ಮಕ ವಿಷಮತೆ' ಹೊಂದಿರುವ ವಿತರಣೆ(Negatively sllewed data) ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

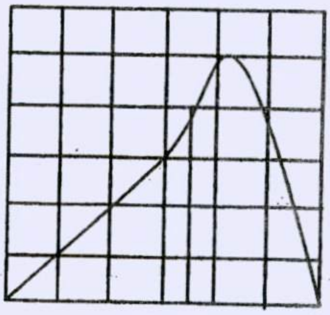
ಚಿತ್ರ 1



ಚಿತ್ರ 2



ಚಿತ್ರ 3



ಚಿತ್ರ 1ರಲ್ಲಿ ಸರಾಸರಿ= ಮಧ್ಯಕ= ಬಹುಳಕ.... ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆ

ಚಿತ್ರ 2ರಲ್ಲಿ ಸರಾಸರಿ >ಮಧ್ಯಕ> ಬಹುಳಕ.... ಧನಾತ್ಮಕ ವಿಷಮತೆ ವಿತರಣೆ

ಚಿತ್ರ 3ರಲ್ಲಿ ಬಹುಳಕ>ಮಧ್ಯಕ> ಸರಾಸರಿ.... ಋಣಾತ್ಮಕ ವಿಷಮತೆ ವಿತರಣೆ

ವಿಷಮತೆಯನ್ನು ಎರಡು ಮುಖ್ಯ ಕ್ರಮಗಳಿಂದ ಅಳತೆ ಮಾಡಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅವುಗಳೆಂದರೆ;

1. ಕಾರ್ಲ್‌ಪಿಯರ್ ಸನ್ ಸೂತ್ರದ ಪ್ರಕಾರ ವಿಷಮತೆ ಗುಣಾಂಕ(Karl pearsan's coefficient of skewness)
2. ಬೌಲೆಯವರ ಸೂತ್ರದ ಪ್ರಕಾರ ವಿಷಮತೆಗುಣಾಂಕ(Bowley's measure of coefficient of skewness)

ಇವುಗಳ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ;

ಕಾರ್ಲ್‌ಪಿಯರ್ ಸನ್ ಸೂತ್ರದ ಪ್ರಕಾರ ವಿಷಮತೆ ಗುಣಾಂಕ $j = \frac{\overline{X} - Z}{\sigma}$

ಇಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿರುವ ಶ್ರೇಣಿಗೆ j = ವಿಷಮತೆ ಗುಣಾಂಕ

$\overline{X}$ = ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ

Z = ಬಹುಳಕ

σ = ಮಾನಕ ವಿಚಲನ

δ ಬೌಲೆಯವರ ಸೂತ್ರ $J = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 + Q_1}$

J = ವಿಷಮತೆ

Q_1 = ಮೇಲಿನ ಚತುರ್ಥಕ, Q_3 = ಮೇಲಿನ ಚತುರ್ಥಕ, M = ಮಧ್ಯಕ

ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ತಿರಸ್ಕರಿಸಿರುವ ಸರಕುಗಳು ಪ್ರತಿ ಉತ್ಪಾದಕನಿಗೆ	ಉತ್ಪಾದಕರ ಸಂಖ್ಯೆ	ತಿರಸ್ಕರಿಸಿರುವ ಸರಕುಗಳು ಪ್ರತಿ ಉತ್ಪಾದಕನಿಗೆ ಪ್ರತಿ ಉತ್ಪಾದಕನಿಗೆ	ಉತ್ಪಾದಕರ ಸಂಖ್ಯೆ
21-25	5	41-45	15
26-30	15	46-50	12
31-35	28	51-55	3
36-40	42		

ಈ ಮಾಹಿತಿಗೆ ಕಾರ್ಲ್ ಪಿಯರ್‌ರವರ ವಿಷಮತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕೋಣ.

ವರ್ಗಾಂತರ	ಮಧ್ಯಬಿಂದು X	f	$(x-38)/5$ d	fd	fd2
20.5-25.5	23	5	-3	-15	45
25.5-30.5	28	15	-2	-30	60
30.5-35.5	33	28	-1	-28	28
35.5-40.5	38	42	0	0	0
40.5-45.5	43	15	+1	+15	15
45.5-50.5	48	12	+2	+24	48
50.5-55.5	53	3	+3	+9	27
		N= 120		Σfd=-25	Σfd^2=223

$$\overline{X} = A + \frac{\sum fd}{N} X\ i = 38 \frac{-25}{20} X\ 5 = 38 - 1.04 = 36.96$$

ಮಾನಕ ವಿಚಲನ = $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N} - \left(\frac{\sum fd}{N}\right)^2} X\ i$

$$= \sqrt{\frac{223}{120} - \left(\frac{-25}{120}\right)^2} X\ 5$$

$$= \sqrt{1.8583 - 0.0434}\ X\ 5$$

$$\sqrt{1.8149}\ X\ 5$$

$$1.3472\ X\ 5$$

$$= 6.736$$

ಬಹುಳಕ $= L + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}\ X\ i$

$$= 35.5 + \frac{14}{14+27} X\ 5$$

$$= 35.5 + 1.71 = 37.21$$

$$= \frac{36.96 - 37.21}{6.736} = \frac{-0.25}{6.736} = -0.03'$$

ಉದಾಹರಣೆ:

ಕೆಳಗಿನ ನ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಬೌಲೆಯವರ ವಿಷಮತೆ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕೋಣ

ವಾರದ ವೇತನ (ರೂ. ನಲ್ಲಿ) X	ಕೂಲಿಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ f	ಸಂಚಿತ ಆವರ್ತ c.f
150-200	10	10
200-250	25	35
250-300	145	180
300-350	220	400
350-400	70	470
400-450	30	500
	$\Sigma f = 500$	

$$m_1 = \frac{N+1}{2} = \frac{501}{2} = 250.5$$

$$q_1 = \frac{N+1}{4} = \frac{501}{4} = 125.25$$

$$q_3 = (N+1)\frac{3}{4} = \frac{501X3}{4} = \frac{1503}{4}$$

$$= 350.75$$

$$M = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f_1}(m_1 - c)$$

$$M = 300 + \frac{350 - 300}{220}(250.5 - 180)$$

$$M = 300 + \frac{50}{220}(70.5)$$

$$M = 316.02$$

$$Q_1 = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f_1}(q_1 - c)$$

$$Q_1 = 250 + \frac{350 - 300}{145}(125.25 - 35)$$

$$Q_1 = 250 + \frac{50}{145}95.25$$

$$Q_1 = 282.84$$

$$Q_3 = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f_1}(q_3 - c)$$

$$Q_3 = 300 + \frac{350 - 300}{220}(350.75 - 180)$$

$$Q_3 = 300 + \frac{50}{220}(170.75)$$

$$Q_3 = 338.75$$

ಬೌಲೆಯವರ ವಿಷಮತೆ ಗುಣಾಂಕ= $J = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 + Q_1}$

$$\frac{338.75 + 282.84 - 2(316.02)}{338.75 - 282.84}$$

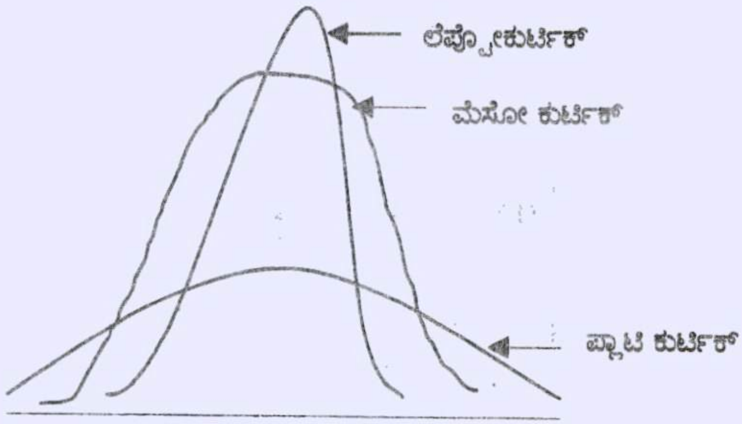
$$= \frac{621.59 - 632.04}{55.91}$$

$$= -\frac{10.45}{55.91} = -0.18$$

$$j = -0.18$$

22.3 ಶಿಖರತೆ(Kurtosin)

ಒಂದು ವಿತರಣೆಯು ಚೂಪಾಗಿದೆಯೋ, ಹರಡಿಕೊಂಡಿದೆಯೋ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಶಿಖರತೆ ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಂತೆ ಶಿಖರತೆಯನ್ನು ವಿವರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆ ಗಂಟೆಯ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ತೋರಿಸುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ನಾವು ಹಿಂದೆಯೇ ಗಮನಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಈ ರೇಖೆ ತುಂಬಾ ಚೂಪಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು 'ಲೆಪ್ಟೋಕುರ್ಟಿಕ್' ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆಗಿಂತ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಹರಡಿಕೊಂಡಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು 'ಪ್ಲಾಟಿಕುರ್ಟಿಕ್' ಎಂದು ಕರೆಯ.ಲಾಗುತ್ತದೆ. ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆಯನ್ನು 'ಮೆಸೋಕು ಕುರ್ಟಿಕ್'ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗಿನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.



ಶಿಖರತೆಯನ್ನು β_2 ನಿಂದ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. β_2 ವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸೂತ್ರೀಕರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

ಇಲ್ಲಿ μ_4 ನಾಲ್ಕನೇ ಮೊಮೆಂಟ್

μ_2 ಎರಡನೇ ಮೊಮೆಂಟ್

ನಾಲ್ಕು ಮೊಮೆಂಟ್ ಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸೂತ್ರೀಕರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

$$\mu_1^1 = \frac{\sum fd}{N} X i$$

$$\mu_2^1 = \frac{\sum fd^2}{N} X i^2$$

$$\mu_3^1 = \frac{\sum fd^3}{N} X i^3$$

$$\mu_4^1 = \frac{\sum fd^4}{N} X i^4$$

ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆಗೆ $\beta_2 = 3$ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಶಿಖರತೆಯ ಬೆಲೆ 3ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದ್ದರೆ, ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಲಿಪ್ಟೋಕುರ್ಟಿಕ್ ಎಂದೂ ಅದು 3ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಿದ್ದರೆ, ಕೊಡಲಾಗಿರುವ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಪ್ಲಾಟಿ ಕುರ್ಟಿಕ್ ಎಂದೂ ಗುರುತಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಕೆಳಗಿನ ನ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಶಿಖರತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕೋಣ

ವರ್ಗಾಂತರ:	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
ಆವರ್ತ:	5	10	50	15	20

X	f	$dx_{(25)}$	$d'x$	$fd'x$	$fd'x^2$	$fd'x^3$	$fd'x^4$
5	5	-20	-2	-10	20	-40	80
15	10	-10	-1	-10	10	-10	10
25	50	0	0	0	0	0	0
35	15	10	1	15	15	15	15
45	20	20	2	40	80	160	320
	100			35	125	125	425

$$\mu_1^1 = \frac{\sum fd^1}{\sum f} Xi = \frac{35}{100} X10 = 3.5$$

$$\mu_2^1 = \frac{\sum fd^1 x^2}{\sum f} Xi = \frac{125}{100} X10 = 12.5$$

$$\mu_3^1 = \frac{\sum fd' x^3}{\sum f} Xi = \frac{125}{100} X10 = 12.5$$

$$\mu_4^1 = \frac{\sum fd' x^4}{\sum f} Xi = \frac{425}{100} X10 = 42.5$$

29

$$\mu_2 = \mu_2^1 - \left(\mu_1^1\right)^2$$

$$\mu_2 = 125 - (3.5)^2$$

$$\mu_2 = 125 - 1225 = 0.25$$

$$\mu_4 = \mu_4^1 - 4\mu_1^1\mu_3^1 + 6\mu_2^1\mu_1^1 - 3\left(\mu_4^1\right)^4$$

$$\mu_4 = 425 - 4(3.5)(125) + 6(125)(3.5)^2 - 3(3.5)^4$$

$$\mu_4 = 425 - 175 + 91875 - 45019$$

$$\mu_4 = 333606$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{333606}{(0.25)^2} = \frac{33606}{0.0625} = 537696$$

β_2, 3ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಇದು ಲೆಪ್ಟೋ ಕುರ್ಟಿಕ್ ವಿತರಣೆ

22.4 ಸಾರಾಂಶಿಸೋಣ

ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನೀವು ಒಂದು ವಿತರಣೆಯ ವಿಷಮತೆ ಮತ್ತು ಶೃಂಗತೆಯನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸಮಾಡಿದ್ದೀರಿ. ವಿಷಮತೆ, ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿನ ಅಸಮಾನತೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸಿದರೆ, ಶೃಂಗತೆ, ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಂತೆ ಚೂಪಾಗಿ ವಿತರಣೆಯಾಗಿದೆಯೋ ಅಥವಾ ಹರಡಿಕೊಂಡಿದೆಯೋ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತದೆ. ನಾವು ವಿಷಮತೆ ಮತ್ತು ಶೃಂಗತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಸಹ ಕಲಿತುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಇವುಗಳ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಸಾರಾಂಶದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ನೋಡೋಣ.

1. ಕಾರ್ಲ್ ಪಿಯರ್ ಸನ್ ವಿಷಮತೆ ಗುಣಾಂಕ = $J = \dfrac{\overline{X} - Z}{\sigma}$

2. ಬೌಲೆಯವರ ವಿಷಮತೆ ಗುಣಾಂಕ = $J = \dfrac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 + Q_1}$

3.ಶಿಖರತೆ $$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2}$$

$$\mu_2 = \mu_2^1 - \left(\mu_1^1\right)^2$$

$$\mu_1^1 = \frac{\Sigma fd'x}{\Sigma f}$$

$$\mu_2^1 = \frac{\Sigma fd'x^2}{\Sigma f}$$

$$\mu_4 = \mu_4^1 - 4\mu_1^1\mu_3^1 + 6\mu_2^1\mu_1^2 - 3\mu_1^4$$

$$\mu_3^1 = \frac{\Sigma fd'x^3}{\Sigma f}$$

$$\mu_4^1 = \frac{\Sigma fd'x^4}{\Sigma f}$$

22.5 ಮುಖ್ಯ ಪರಿಭಾವನೆಗಳು

1. ವಿಷಮತೆ
2. ಶೃಂಗತೆ
3. ಲೆಪ್ಟೋಕುರ್ಟಿಕ್‌ವಿತರಣೆ
4. ಪ್ಲೇಟೋ ಕುರ್ಟಿಕ್ ವಿತರಣೆ
5. ಮೆಸೋ ಕುರ್ಟಿಕ್ ವಿತರಣೆ
6. ಮೊಮೆಂಟ್ಸ್‌ಗಳು

22.6 ಸ್ವ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

1. ಶೃಂಗತೆ ಮತ್ತು ವಿಷಮತೆಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿ.
2. ಕೆಳಗಿನ ವಿತರಣೆಗೆ ಕಾರ್ಲ್‌ಪಿಯರ್‌ಸನ್ ಮತ್ತು ಬೌಲೆಯವರ ವಿಷಮತೆ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿ.

ವರ್ಗಾಂತರ:	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
ಆವರ್ತ:	5	15	20	25	30

3. ಕೆಳಗಿನ ನ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಶಿಖರತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿ.

ವರ್ಗಾಂತರ:	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25
ಆವರ್ತ:	5	6	5	10	4

4.ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿ

1. 3. ಲೆಪ್ಟೋಕುರ್ಟಿಕ್ವಿತರಣೆ
2. ಪ್ಲೇಟೋ ಕುರ್ಟಿಕ್ ವಿತರಣೆ
3. ಮೆಸೋ ಕುರ್ಟಿಕ್ ವಿತರಣೆ

22.7 ಮುಂದಿನ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ

D.N. Elhance : Fundamentals of Statistics,

ಘಟಕ -23

ಸಹ ಸಂಬಂಧ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ

23.1 ಪೀಠಿಕೆ

23.2 ಸಹ ಸಂಬಂಧದ ಬಗೆಗಳು

23.3 ನಿಮ್ಮ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ

23.4 ಸಹ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವ ವಿಧಾನಗಳು

23.5 ನಕ್ಷಾ ವಿಧಾನದ ಅನುಕೂಲಗಳು ಮತ್ತು ಅನಾನುಕೂಲಗಳು

23.6 ಸಾರಾಂಶಿಸೋಣ

23.7 ಮುಖ್ಯ ಪರಿಭಾವನೆಗಳು

23.8 ಸ್ವ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

23.9 ಮುಂದಿನ ಓದಿಗಾಗಿ

23.1 ಪೀಠಿಕೆ:

ಹಿಂದಿನ ಘಟಕದಲ್ಲಿ ನಾವು ಒಂದು ಚಲಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ, ಸರಾಸರಿ ಮಧ್ಯಕ, ಬಹುಳಕ, ಮಾನಕ ವಿಚಲನ ಮುಂತಾದವುಗಳ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ನೋಡಿದೆವು. ಆರ್ಥಿಕ ಕ್ರಿಯೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ, ಒಂದು ಮುಖ್ಯವಾದ ಅಂಶವೆಂದರೆ, ಆರ್ಥಿಕ ಚಲಗಳ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧ- ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಬೆಲೆ, ಬೇಡಿಕೆ ಅನುಭೋಗ -ಆದಾಯ, ಮಳೆ -ಬೆಳೆ, ಆದಾನ -ವಿದಾನ ಈ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಇವು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಂಬಂಧವನ್ನಿಟ್ಟುಕೊಂಡಿವೆ. ಇವುಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧ ಇಟ್ಟುಕೊಂಡಿವೆಯೇ ಇಲ್ಲವೇ ಯಾವ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಎರಡೂ ಚಲಗಳು ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ಅಥವಾ ಕೆಳಮುಖವಾಗಿ ಒಟ್ಟಿಗೆ ಚಲಿಸುತ್ತವೆಯೇ ಅಥವಾ ಪರಸ್ಪರ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತವೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಹ ಸಂಬಂಧ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯಲ್ಲಿ ನಡೆಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಹ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಬಹುದು.

ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚಿನ ಚಲಗಳು, ಯಾವ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, ಎರಡು ಚಲಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಇವೆರಡೂ ಚಲಗಳೂ ಒಟ್ಟಿಗೇ ಒಂದೆ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತವೆಯೇ ಅಥವಾ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತವೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಹ ವಿಶ್ಲೇಷಿಸುತ್ತದೆ. ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕ ಎರಡು ಚಲಗಳ ನಡುವಣ ಸಂಬಂಧದ ಗಟ್ಟಿತನವನ್ನು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೂಲಕ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತದೆ.

23.2 ಸಹ ಸಂಬಂಧದ ಬಗೆಗಳು

ಎರಡು ಚಲಗಳ ನಡುವಣ ಸಹ ಸಂಬಂಧ

(i) ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರಬಹುದು.

(ii) ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರಬಹುದು

(iii) ಸರಳವಾಗಿರಬಹುದು

(iv) ಬಹುಳಕವಾಗಿರಬಹುದು.

(v) ಭಾಗಶಃ ವಾಗಿರಬಹುದು.

(vi) ಸರಳರೇಖೆ ಸಂಬಂಧವಾಗಿರಬಹುದು

(vii) ವಕ್ರರೇಖೆ ಸಂಬಂಧವಾಗಿರಬಹುದು

ಇವುಗಳನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ವಿವರವಾಗಿ ನೋಡೋಣ

(i) ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರಬಹುದು: ಎರಡು ಚಲಗಳು ಒಟ್ಟಿಗೇ ಒಂದೇ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳ ನಡುವೆ ಧನಾತ್ಮಕ ಸಹ ಸಂಬಂಧ(Positive Correlasion) ಇದೆ ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಆದಾಯ -ಅನುಭೋಗ, ಬೆಲೆ - ನೀಡಿಕೆ ಇತ್ಯಾದಿ. ಇವು ಒಂದೇ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ ಆದಾಯ ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ, ಅನುಭೋಗವೂ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ.

(ii) ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರಬಹುದು: ಎರಡು ಚಲಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುವಾಗ ಒಂದು ಚಲ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಚಲಿಸಿದಾಗ, ಮತ್ತೊಂದು ಕೆಳಮುಖವಾಗಿ ಚಲಿಸಿದರೆ, ಇವೆರಡರ ನಡುವೆ ಋಣಾತ್ಮಕ ಸಹ ಸಂಬಂಧವಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಬೆಲೆ-ಬೇಡಿಕೆಯ ಪ್ರಮಾಣ, ಅನುಭೋಗ - ಸೀಮಾಂತ ತುಷ್ಟಿಗುಣ ಇತ್ಯಾದಿ. ಈ ಸಂಬಂಧಗಳಲ್ಲಿ , ಬೆಲೆ ಹೆಚ್ಚಾದಾಗ ಬೇಡಿಕೆಯ ಪ್ರಮಾಣ ಕಡಿಮೆ ಯಾಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ ಒಂದು ಸರಕಿನ ಅನುಭೋಗ ಹೆಚ್ಚಾದಾಗ ಅದರಿಂದ ದೊರೆಯುವ ಸೀಮಾಂತ ತುಷ್ಟಿಗುಣ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಇತ್ಯಾದಿ. ಇಂತಹ ಸಂಬಂಧವಿರುವಾಗ ಎರಡು ಚಲಗಳ ನಡುವೆ ಋಣಾತ್ಮಕ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ವಿದೆ (Negative correlation)ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ.

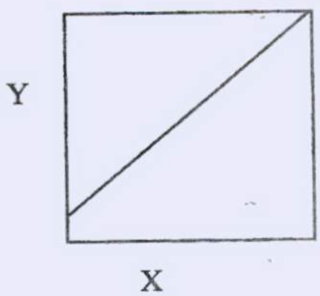
(iii) ಸರಳವಾಗಿರಬಹುದು(SimpleCorrelation) : ನಾವು ಕೇವಲ ಎರಡು ಚಲಗಳ ಸಹ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುತ್ತಿದ್ದರೆ , ಅದನ್ನು ಸರಳ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಬೆಲೆ ಬೇಡಿಕೆಯ ಪ್ರಮಾಣ, ಬೆಲೆ ನೀಡಿಕೆಯ ಪ್ರಮಾಣ, ಮಳೆ ಬೆಳೆಯ ಪ್ರಮಾಣ ಇತ್ಯಾದಿ.

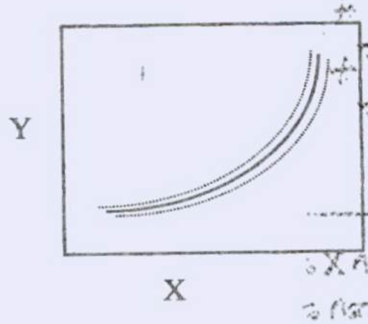
(iv) ಬಹುಳಕವಾಗಿರಬಹುದು(Multipale correlation): ನಾವು ಅನೇಕ ಚಲಗಳ ನಡುವಣ ಸಹ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸುತ್ತಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಬಹುಳಕ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಬೇಡಿಕೆಯ ಪ್ರಮಾಣ, - ಬೆಲೆ, ಅಭಿರುಚಿ, ಆದಾಯಗಳ ನಡುವಣ ಸಂಬಂಧ ಉತ್ಪಾದನೆ ಭೂಮಿ, ಶ್ರಮ ಮತ್ತು ಬಂಡವಾಳಗಳ ನಡುವಣ ಸಂಬಂಧ ಇತ್ಯಾದಿ.

(v) ಭಾಗಶಃ ವಾಗಿರಬಹುದು: (Partial correlation):ಅನೇಕ ಚಲಗಳ ನಡುವಣ ಸಹ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವ, ಸ್ವತಂತ್ರ ಚಲಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಉಳಿದ ಚಲಗಳ ನಡುವಣ ಸಹ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುತ್ತಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು ಭಾಗಶಃ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಒಂದು ಸರಕಿನ ಬೇಡಿಕೆಯ ಪ್ರಮಾಣ, ಅದರ ಬೆಲೆ, ಅನುಭೋಗಿಯ ಆದಾಯ, ಅವನ ಅಭಿರುಚಿಗಳೊಡನೆ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧ ಹೊಂದಿದೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡೆರಡೇ ಚಲಗಳನ್ನು ಆಯ್ದುಕೊಂಡು ಉಳಿದವುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಿರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ನಡೆಸಿದರೆ ಅದನ್ನು ಭಾಗಶಃ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

(vi) ಸರಳ ರೇಖೆ ಸಹ ಸಂಬಂಧ: ಎರಡು ಚಲಗಳ ನಡುವಣ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಗಣಿತೀಯವಾಗಿ $Y = mx + c$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತವಾಗುತ್ತಿದ್ದರೆ. ಅದನ್ನು ಸರಳರೇಖೆ ಸಹ ಸಂಬಂಧ (Linear Correlation) ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

(vii) ವಕ್ರ ರೇಖಾ ಸಹ ಸಂಬಂಧ: ಎರಡು ಚಲಗಳ ನಡುವಣ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ವಕ್ರ ರೇಖಾ ಸಂಬಂಧದ ಮೂಲಕ ವ್ಯಕ್ತವಾಗುತ್ತಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ವಕ್ರ ರೇಖೆ ಸಹ ಸಂಬಂಧವೆಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಚಿತ್ರ 1ಮತ್ತು 2ರಲ್ಲಿ ಸರಳರೇಖೆ ಮತ್ತು ವಕ್ರ ರೇಖೆ ಸಹ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಚಿತ್ರ (1)......... $Y = mx + c$ ರೂಪದ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ವ್ಯಕ್ತ ಪಡಿಸುತ್ತದೆ. ಚಿತ್ರ (2)-............$Y = ax^2 + +bx + c$ ರೂಪದ ವಕ್ರರೇಖೆ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತದೆ. Xಮತ್ತು Yಚಲಗಳ, ಸರಳರೇಖೆ ಮತ್ತು ವಕ್ರ ರೇಖೆ ಸಹ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಇವು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತವೆ.





23.3 ನಿಮ್ಮ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ

ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ

1.ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಎಂದರೇನು?

2. ಇವುಗಳನ್ನು ವ್ಯತ್ಯಸಿಸಿ

(i) ಸರಳರೇಖೆ ಸಹ ಸಂಬಂಧ- ವಕ್ರರೇಖೆ ಸಹ ಸಂಬಂಧ

(ii) ಸರಳರೇಖೆ ಸಹ ಸಂಬಂಧ - ಬಹುಳಕ ಸಹ ಸಂಬಂಧ

(iii) ಧನಾತ್ಮಕ ಸಹ ಸಂಬಂಧ - ಋಣಾತ್ಮಕ ಸಹ ಸಂಬಂಧ

23.4 ಸಹ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸಮಾಡುವ ವಿಧಾನಗಳು

ಸಹ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಅನೇಕ ವಿಧಾನದಿಂದ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಮುಖ್ಯವಾದವುಗಳೆಂದರೆ,

1. ನಕ್ಷಾ ವಿಧಾನ ಮತ್ತು 2. ಗಣಿತೀಯ ವಿಧಾನ

1.ನಕ್ಷಾ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ

(i) ಚಲಗಳ ವಿತರಣೆ ವಿಧಾನ (Scattergram) (ii) ಎರಡು ಚಲಗಳ ನಕ್ಷಾ ವಿಧಾನ(Graphical method)

2. ಗಣಿತೀಯ ವಿಧಾನ:

(i)ಕಾರ್ಲ್ ಪಿಯರ್‌ಸನ್‌ರವರ ಸಹ ಸಂಬಂಧದ ಗುಣಾಂಕ

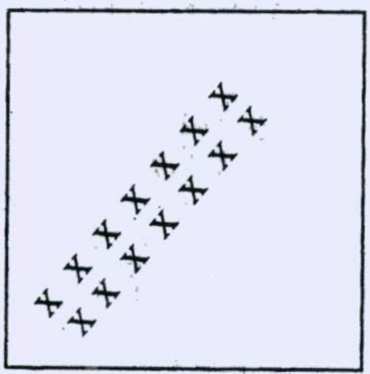
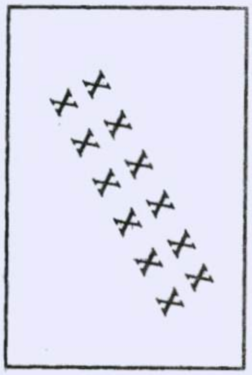
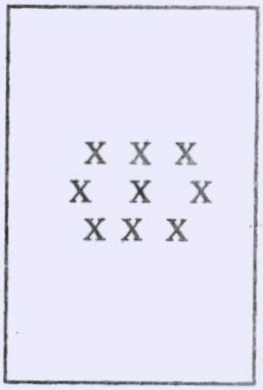
(ii) ಸ್ಪಿಯರ್ ಮನ್ ರವರ ರ್‍ಯಾಂಕ್ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕ

(iii) ವಿಚಲನ ಸೂಚಿ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕ(Method of Concurrent deviations)

ಇವುಗಳನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ವಿವರವಾಗಿ ನೋಡೋಣ

1. ಚಲ ವಿತರಣೆ ವಿಧಾನ(Scatter gram)

ಈ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಜೋಡಿ ಚಲಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಮೂಡಿಸಿ ಅದು ಹೊರ ಹೊಮ್ಮಿಸುವ ನಕ್ಷೆಯ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಎರಡೂ ಚಲಗಳ ನಡುವೆ ಧನಾತ್ಮಕ ಸಹ ಸಂಬಂಧವಿದೆಯೋ ಋಣಾತ್ಮಕ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ವಿದೆಯೇ ಅಥವಾ ಎರಡೂ ಚಲಗಳು ಸ್ವತಂತ್ರ ವಾದುವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇಂತಹ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಚಲ ವಿತರಣೆ ನಕ್ಷೆ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಮೂರು ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ

ಚಿತ್ರ1ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ X ಮತ್ತು Y ಗಳ ನಡುವೆ ಧನಾತ್ಮಕ ಸಹ ಸಂಬಂಧವಿರುವುದನ್ನು ವ್ಯಕ್ತ ಪಡಿಸುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ವಿತರಣೆಯ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕ ಮುಖವಾಗಿ ಎಡದಿಂದ ಬಲಕ್ಕೆ ಮೇಲೇರುತ್ತಿವೆ.

ಚಿತ್ರ 2 ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಋಣಾತ್ಮಕ ಸಹ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ವ್ಯಕ್ತ ಪಡಿಸುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಚಲದ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕ ಮುಖವಾಗಿ ಎಡದಿಂದ ಬಲಕ್ಕೆ ಕೆಳಗಿಳಿಯುತ್ತಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ Xಮತ್ತು y ಗಳ ನಡುವೆ ಋಣಾತ್ಮಕ ಸಹ ಸಂಬಂಧವಿದೆ.

ಚಿತ್ರ 3ರಲ್ಲಿ ಬಿಂದುಗಳು ಯಾವ ಸ್ಪಷ್ಟ ದಿಕ್ಕನ್ನೂ ತೋರಿಸುತ್ತಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ Xಮತ್ತು Y ಗಳ ನಡುವೆ ಯಾವ ಸಹ ಸಂಬಂಧವೂ ಇಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಚಲ ವಿತರಣೆ ನಕ್ಷೆ ಸುಲಭವಾಗಿ ನಮಗೆ ಸಹ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

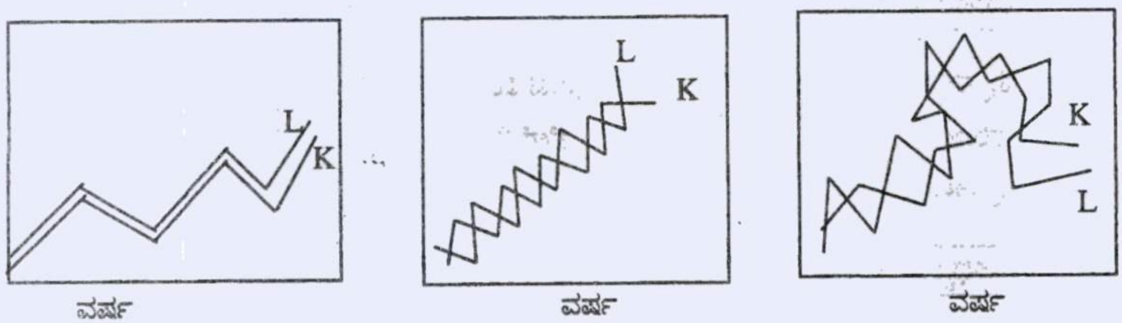
(ii) ಎರಡು ಚಲಗಳ ನಕ್ಷಾ ವಿಧಾನ (Graphical Method)

ನಕ್ಷೆಗಳ ಮೇಲೆ ಚಲಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ನಕ್ಷಾ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಮೂಡಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಸಹ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಅರಿಯಬಹುದು. ಕೆಳಗಿನ ಮೂರು ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ನೋಡಿ. ಇವು ಹಣದ ಸರಬರಾಜು ಮತ್ತು ಬೆಲೆ ಮಟ್ಟಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ನಕ್ಷೆಗಳು

ಚಿತ್ರ 1,2,3,ರಲ್ಲಿ ox - ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ವರ್ಷಗಳನ್ನು ಮತ್ತು Oy - ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಹಣದ ಸರಬರಾಜು ಮತ್ತು ಬೆಲೆಮಟ್ಟಗಳನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. K ಮತ್ತು L ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಹಣದ ಸರಬರಾಜು ಮತ್ತು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಬೆಲೆ ಮಟ್ಟಗಳನ್ನು ವ್ಯಕ್ತ ಪಡಿಸುತ್ತವೆ. ಚಿತ್ರ 1ರಲ್ಲಿ Lಮತ್ತು k ಒಂದೇ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತಿವೆ. ಅಂದರೆ ಹಣದ ಸರಬರಾಜು ಮತ್ತು ಬೆಲೆ ಮಟ್ಟಗಳು ಒಂದೇ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತಿವೆ. ಅಂದರೆ ಹಣದ ಸರಬರಾಜು ಹೆಚ್ಚಿದಂತೆ, ಬೆಲೆಗಳು ಕೂಡ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇವೆರಡರ

ನಡುವೆ ಧನಾತ್ಮಕ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ವಿದೆ. ಚಿತ್ರ 2ರಲ್ಲಿ K ಮೇಲಕ್ಕೇರಿದರೆ Lಕೆಳಕ್ಕಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಹಣದ ಸರಬರಾಜು ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ ಬೆಲೆ ಮಟ್ಟ ಕೆಳಗಿಳಿಯುತ್ತಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇವೆರಡೂ ಚಲಗಳ ನಡುವೆ ಋಣಾತ್ಮಕ ಸಹ ಸಂಬಂಧವಿದೆ. ಚಿತ್ರ 3ರಲ್ಲಿ Kಮತ್ತು L ರೇಖೆಗಳು ಯಾವ ಸ್ಪಷ್ಟ ಸಂಬಂಧವನ್ನೂ ತೋರಿಸುತ್ತಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇವೆರಡೂ ಚಲಗಳ ನಡುವೆ ಸಹ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಗುರುತಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯ

ಚಿತ್ರ 1 ಚಿತ್ರ 2 ಚಿತ್ರ 3



K= ಹಣದ ಸರಬರಾಜು

L= ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಬೆಲೆ ಮಟ್ಟ

23.5 ನಕ್ಷಾ ವಿಧಾನದ ಅನುಕೂಲಗಳು ಮತ್ತು ಅನಾನುಕೂಲಗಳು

ಅನುಕೂಲಗಳು: ನಕ್ಷಾ ವಿಧಾನದ ಮೂಲಕ ಬಹಳ ಸುಲಭವಾಗಿ ಎಲ್ಲರೂ ಎರಡು ಚಲಗಳ ನಡುವಿನ ಸಹ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಗುರುತಿಸ ಬಹುದು. ಇದಕ್ಕೆ ಗಣಿತದ ಜ್ಞಾನ ಅಗತ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಅನಾನುಕೂಲಗಳು**1.** ನಕ್ಷಾ ವಿಧಾನ ಎರಡು ಚಲಗಳ ಸಹ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಎರಡು ಚಲಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾದರೆ ನಕ್ಷಾ ವಿಧಾನ ಉಪಯುಕ್ತವಲ್ಲ.

2ನಕ್ಷಾ ವಿಧಾನ: ಗಣಿತ ರೂಪದ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೂಲಕ ಸಹ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ನೀಡುವುದಿಲ್ಲ. ಕೇವಲ ಎರಡು ಚಲಗಳ ನಡುವೆ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ವಿದೆಯೇ ಇಲ್ಲವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಅದು ತಿಳಿಸಿತ್ತದೆ ಅಷ್ಟೆ. ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಗಾಗಿ ಗಣಿತೀಯ ವಿಧಾನದ ಮೊರೆ ಹೋಗಬೇಕು.

23.6 ಸಾರಾಂಶಿಸೋಣ

ಈ ಯೂನಿಟ್ ನಲ್ಲಿ ನಾವು ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕ ಎಂದರೇನು? ಅದನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡುವ ವಿಧಾನಗಳು ಯಾವುವು ಎನ್ನುವುದನ್ನು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಸಾರಾಂಶದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ ಸಹ ಸಂಬಂಧ, ಎರಡು ಚಲಗಳ ನಡುವಣ ಚಲನದ ದಿಕ್ಕುಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ. ಎರಡು ಚಲಗಳು ಒಂದೇ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತಿವೆಯೇ, ಪರಸ್ಪರ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತಿವೆಯೇ ಅಥವಾ ಎರಡೂ ಚಲಗಳು ಸ್ವತಂತ್ರವಾದುವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಹ ಸಂಬಂಧ ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ. ಎರಡು ಚಲಗಳ ನಡುವೆ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರಬಹುದು ಅಥವಾ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಸಹ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ.

ಸಹ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ನಕ್ಷಾ ವಿಧಾನದ ಮೂಲಕ ಅಥವಾ ಗಣೀತೀಯವಾಗಿ ಅಳತೆ ಮಾಡಬಹುದು. ನಕ್ಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಚಲ ವಿತರಣೆ ಮೂಲಕ ಅಥವಾ ಎರಡು ಚಲಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಒಟ್ಟಾಗಿ ಮೂಡಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಸಹ ಸಹ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಅರಿಯಬಹುದು. ಆದರೆ ಈ ವಿಧಾನದ ಎರಡು ಮಿತಿಗಳೆಂದರೆ ಮೊದಲನೆಯದಾಗಿ ಎರಡು ಚಲಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವ ಸಂದರ್ಭ ಬಂದಾಗ ನಕ್ಷೆ ಕೆಲಸ ಮಾಡುವುದಿಲ್ಲ. ಹಾಗೆಯೇ ನಕ್ಷೆ, ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಗಣಿತೀಯ ಮಾಪನವನ್ನು ನೀಡುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ಎರಡು ಚಲಗಳ ಸಹ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಅರಿಯಬೇಕಾದರೆ, ಗಣಿತೀಯ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಬೇಕು ಇದನ್ನು ಮುಂದಿನ ಘಟಕದಲ್ಲಿ ನೋಡುತ್ತೇವೆ.

23.7 ಮುಖ್ಯ ಪರಿಭಾವನೆಗಳು

1. ಸಹ ಸಂಬಂಧ
2. ನಕ್ಷಾ ವಿಧಾನದ ಮೂಲಕ ಸಹ ಸಂಬಂಧ
3. ಚಲ ವಿತರಣೆ ವಿಧಾನ

23. 8 ಸ್ವ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

1. ಸಹ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಮೂಲಕ ಅಳತೆ ಮಾಡುವುದರಲ್ಲಿರುವ ಮಿತಿಗಳೇನು ?
2. ಚಲ ವಿತರಣೆಯ ಮೂಲಕ ಸಹ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಅರಿಯುವುದು ಹೇಗೆ ?
3. ಸಹ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡುವ ವಿಧಾನಗಳಾವುವು?

23.9 ಮುಂದಿನ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ

D.N. Elhance : Fundamentals of Statistics, ಅಧ್ಯಾಯ 11

ಘಟಕ -24

ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕ

24.1 ಪೀಠಿಕೆ

24.2 ಕಾರ್ಲ್ ಪಿಯರ್‌ರವರ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕ

24.3 ನಿಮ್ಮ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

24.4 ಸ್ಪಿಯರ್‌ಮನ್‌ರವರ ರ್‍ಯಾಂಕ್‌ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕ

24.5 ವಿಚಲನ ಸೂಚಿ ಸಹ ಸಂಬಂಧ

24.6 ಸಾರಾಂಶಿಸೋಣ

24.7 ನಿಮ್ಮ ಅಭ್ಯಾಸಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

24.9 ಮುಂದಿನ ಓದಿಗಾಗಿ

ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕ

24.1 ಪೀಠಿಕೆ:

ಸಹ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಎರಡು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಅಳತೆ ಮಾಡಬಹುದು. ಮೊದಲನೆಯದು ನಕ್ಷಾ ವಿಧಾನ ಎರಡನೆಯದು ಗಣಿತೀಯ ವಿಧಾನ ಎಂಬುದನ್ನು ಹಿಂದಿನ ಘಟಕದಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಜೊತೆಗೆ ಹಿಂದಿನ ಘಟಕದಲ್ಲಿ ನಕ್ಷಾ ವಿಧಾನದ ಮೂಲಕ ಸಹ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹೇಗೆ ನೋಡಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಸಹ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ಗಣಿತೀಯ ವಿಧಾನದ ಮೂಲಕ ಹೇಗೆ ಎರಡು ಚಲಗಳ ನಡುವಣ ಸಹ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡುತ್ತೇವೆ.

ಹಿಂದಿನ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನಾವು ವಿವರಿಸಿರುವಂತೆ ಗಣಿತೀಯ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ 3ಕ್ರಮಗಳಿಂದ ಎರಡು ಚಲಗಳ ಸಹ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಬಹುದ್ದು, ಅವುಗಳೆಂದರೆ,

(i) ಕಾರ್ಲ್ ಪಿಯರ್‌ಸನ್‌ರವರ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕ

(ii) ಸ್ಪಿಯರ್ ಮನ್‌ರವರ ರ್‍ಯಾಂಕ್ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕ ಮತ್ತು

(iii) ವಿಚಲನ ಸೂಚಿ ಕ್ರಮದ ಮೂಲಕ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕ (Concurrent deviation method)

ಇವುಗಳನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ವಿವರವಾಗಿ ನೋಡೋಣ.

24.2 (i) ಕಾರ್ಲ್‌ಪಿಯರ್‌ಸನ್ ರವರ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕ

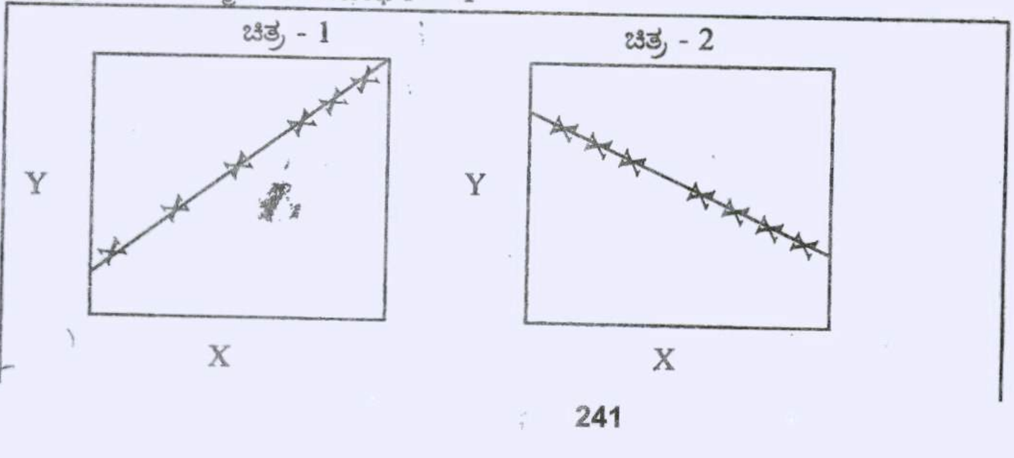
ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕದ ಬಗ್ಗೆ ಕೆಲವು ಅಂಶಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು. ಅವುಗಳೆಂದರೆ

1. ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು -1 ಮತ್ತು +1ರ ಸ್ಕೇಲ್‌ನಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.
2. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕ -1ಮತ್ತು +1ರ ನಡುವೆಯೇ ಇರಬೇಕು. ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು 'r' ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.
3. ಗುಣಾಂಕದ ಬೆಲೆ +1ಆದರೆ ಅದನ್ನು ಪರಿಪೂರ್ಣಧನಾತ್ಮಕ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕ ಎಂದು ಗುರುತಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. (ಆದ್ದರಿಂದ $r = 1$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ)
4. ಗುಣಾಂಕದ ಬೆಲೆ -1 ಆದರೆ ಅದನ್ನು ಪರಿಪೂರ್ಣ ಋಣಾತ್ಮಕ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕವೆಂದು ಗುರುತಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.(ಆದ್ದರಿಂದ $r=-1$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.)
5. ಗುಣಾಂಕದ ಬೆಲೆ -1ಮತ್ತು +1ರ ನಡುವೆಯೇ ಇರುತ್ತದೆ. (ಆದ್ದರಿಂದ – $-1 \le r \le 1$))
6. ಗುಣಾಂಕದ ಬೆಲೆ 0ಯಾದರೆ ಅದನ್ನು ಸೊನ್ನೆ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕವೆಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರ 1ಮತ್ತು 2,ಪರಿಪೂರ್ಣ ಧನಾತ್ಮಕ ಮತ್ತು ಪರಿಪೂರ್ಣಋಣಾತ್ಮಕ ಸಹ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ.

ಚಿತ್ರ 1- ಪರಿಪೂರ್ಣ ಧನಾತ್ಮಕ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಮತ್ತು $r = 1$

ಚಿತ್ರ2-ಪರಿಪೂರ್ಣ ಋಣಾತ್ಮಕ ಸಹ ಸಂಬಂಧ $r = -1$



r =0.6ರಿಂದ 0.9ರವರೆಗೆ ಹೆಚ್ಚು ಧನಾತ್ಮಕ ಸಂಬಂಧವೆಂದೂ

r =0.1ರಿಂದ 0.6ರವರೆಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಹ ಸಂಬಂಧವೆಂದೂ

r = -0.6ರಿಂದ -0.9ರವರೆಗೆ ಹೆಚ್ಚು ಋಣಾತ್ಮಕ ಸಹ ಸಂಬಂಧವೆಂದೂ

r =-0.1ರಿಂದ -0.6ರವರೆಗೆ ದುರ್ಬಲ ಋಣಾತ್ಮಕ ಸಂಬಂಧವೆಂದೂ ಗುರುತಿಸ ಬೇಕು.

ಕಾರ್ಲ್‌ಪಿಯರ್‌ರವರ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಕೊಡಲಾಗುತ್ತದೆ.

$$r = \frac{N \sum fdx.dy - \sum fdx.dy}{\sqrt{\left\{N \sum fdx^2 - \left(\sum fdx\right)^2\right\}\left\{N \sum dy^2 - \left(\sum f.dy\right)^2\right\}}}$$

ಇಲ್ಲಿ r = ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕ $\sum f.dx$ = ಆವರ್ತ ಮತ್ತು x ಶ್ರೇಣಿಯ ಸರಾಸರಿಯಿಂದ x ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಯದ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಮೊತ್ತ

$\sum fdy$ = ಆವರ್ತ ಮತ್ತು y ಶ್ರೇಣಿಯ ಕಲ್ಪನಾ ಸರಾಸರಿಯಿಂದ y ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಯದ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಮೊತ್ತ

$\sum fdx .fdy$ = fdx ಮತ್ತು fdyಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಮೊತ್ತ

$\sum f.dx^2$ == fdx ಮತ್ತು dxಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಮೊತ್ತ

$\sum f.dy^2$ = fdyಮತ್ತು dyಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಮೊತ್ತ

N = ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯಾ ಶ್ರೇಣಿಗೆ ಕಾರ್ಲ್ ಪಿಯರ್ ಸನ್ ರವರ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ.

X:	20	30	32	35	40	46	52	55	58	62
Y:	1	2	0	3	4	6	5	7	8	9

x	(x-43) dx	dx^2	Y	(Y-5) dy	dy^2	dxdy
20	-23	529	1-	4	16	+92
30	-13	169	2	-3	9	+39
32	-11	121	0	-5	25	+55
35	-8	64	3	-2	4	+16
40	-3	9	4	-1	1	+3
46	+3	9	6	+1	1	+3
52	9	81	5	0	0	0
55	+12	144	7	+2	4	+24
58	+15	225	8	+3	9	+45
62	+19	361	9	+4	16	+76
$\sum x$ =430	$\sum dx$ =0	$\sum dx^2$ =1712	$\sum y$=45	$\sum dy$ =-5	$\sum dy^2$ =85	$\sum dxdy$ =353

VOP-18-87

$$r = \frac{N\sum d_x.dy - \sum d_x.dy}{\sqrt{\{N\sum dx^2 - \left(\sum dx\right)^2\}\{N\{\sum dy^2 - \left(\sum dy\right)^2}}$$

$$= \frac{(10\,x\,353) - 0(-5)}{\sqrt{\{10101712 - 0\}\{10\,x\,85 - (-5)^2}}$$

$$r = \frac{3530}{\sqrt{(17120)(825)}} = \frac{3530}{130.85\,x\,28.72}$$

$$r = 0.939$$

ಆದ್ದರಿಂದ Xಮತ್ತು Yಗಳು ಅತ್ಯಂತ ಹೆಚ್ಚು ಧನಾತ್ಮಕ ಸಹ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2:

ಕೆಳಗಿನ ನ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಕಾರ್ಲ್ ಪಿಯರ್‌ಸನ್‌ರವರ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿ.

X:	57	42	40	33	42	45	42	44	40	56	44	43
Y:	10	60	30	41	29	27	27	19	18	19	31	29

x	(x-44) dx	dx^2	Y	(Y-30) dy	dy^2	dxdy
57	+13	169	10	-20	400	-260
42	-2	4	60	+30	900	-60
40	-4	16	30	0	0	0
33	-11	121	41	+11	121	-121
42	-2	4	29	-1	1	+2
45	+1	1	27	-3	9	-3
42	-2	4	27	-3	9	+6
44	0	0	19	-11	121	-132
40	-4	16	18	-12	144	+48
56	+12	144	19	-11	121	-132
44	0	0	31	+1	1	0
43	-1	1	29	-1	1	+1
$\Sigma x = 528$	$\Sigma dx = 0$	$\Sigma d^2x = 480$	$\Sigma y = 340$	$\Sigma dy = -20$	$\Sigma dy^2 = 1823$	$\Sigma dxdy = 579$

$$r = \frac{N\sum dx.dy - \sum dx.\sum dy}{\sqrt{\sum dx^2 - \left(\sum dx)^2\right)}\sqrt{\sum dy^2 - \left(\sum dy)^2\right)}}$$

$$= \frac{12(-579)-(0)(-20)}{\sqrt{12(480)-(0)^2}\sqrt{12(1828)-(-20)^2}}$$

$$= \frac{-6228}{\sqrt{5760}\sqrt{21936}} = \frac{-6228}{11240.61} = -0.554$$

24.3 ನಿಮ್ಮ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ

1. ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡುವ ಗಣಿತೀಯ ವಿಧಾನವನ್ನು ವಿವರಿಸಿ.

2. ಕೆಳಗಿನ ನ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಕಾರ್ಲ್‌ಪಿಯರ್ ಸನ್ ರವರ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿ

X:	10	15	25	30	35	45	60
Y:	40	50	60	75	80	90	102

24.4 ಸ್ಪಿಯರ್‌ಮನ್ ರವರ ರ್‍ಯಾಂಕ್ ಸಹ ಸಂಬಂಧ

ಅನೇಕ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಖಚಿತವಾಗಿ ಅಳತೆಮಾಡುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಅವುಗಳಿಗೆ ರ್‍ಯಾಂಕ್‌ಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟು ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಗುಣಾತ್ಮಕವಾಗಿ ನೋಡಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಕ್ರಿಯೆಗಳು, ಪರಿಣಾಮಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವುದಕ್ಕಿಂತ ಗುಣಾತ್ಮಕವಾದವು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಬುದ್ಧಿವಂತಿಕೆಯನ್ನು ಅಳೆಯುವ ಬುದ್ಧಿವಂತಿಕೆ ಗುಣಾಂಕ ((intelligence Quotient) ಸಂಗೀತ ಸ್ಪರ್ಧೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಡುವ ರ್‍ಯಾಂಕ್‌ಗಳು, ಕ್ವಿಜ್‌ನಲ್ಲಿ , ಸೌಂದರ್ಯ ಸ್ಪರ್ಧೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಡುವ ರ್‍ಯಾಂಕ್‌ಗಳು ಗುಣಾತ್ಮಕವಾದವು. ಇವುಗಳಿಗೆ ಸಹ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವಾಗ ಸ್ಪಿಯರ್‌ಮನ್‌ರವರ ರ್‍ಯಾಂಕ್ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಉತ್ತಮ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಸ್ಪಿಯರ್ ಮನ್ ರವರ ರ್‍ಯಾಂಕ್ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕದ ಗಣಿತೀಯ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಕೊಡಲಾಗುತ್ತದೆ.

$$R = 1 - \frac{6\sum d^2}{N(N^2-1)}$$

ಇಲ್ಲಿ R = ರ್‍ಯಾಂಕ್ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕ
$\sum d^2$ = X ಮತ್ತು Y ಶ್ರೇಣಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ರ್‍ಯಾಂಕ್‌ಗಳ ನಡುವಣ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತ
N = ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ

ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

10 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣಿತ ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಪಡೆದಿರುವ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಇವುಗಳ ನಡುವೆ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ವಿದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ರ್‍ಯಾಂಕ್ ಸಹ ಸಂಬಂಧದ ಗುಣಾಂಕದ ಮೂಲಕ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ

ಗಣಿತ :X:	92	89	87	86	83	77	71	63	53	50
ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ :Y:	86	83	91	77	68	85	52	82	37	57

X	Y	R_1	R_2	d	d^2
92	86	1	2	-1	1
89	83	2	4	-2	4
87	91	3	1	2	4
86	77	4	6	-2	4
83	68	5	7	-2	4
77	85	6	3	3	9
71	52	7	9	-2	4
63	82	8	5	3	9
53	37	9	10	-1	1
50	57	10	8	2	4
					$\sum d^2 = 44$

$$R = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{N(N^2-1)}$$

$$=1 - \frac{264}{100(100-1)}$$

$$=1 - \frac{264}{990}$$

$$=1 - 0.27$$

$$R = 0.73$$

ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ Xಮತ್ತು Y ಶ್ರೇಣಿಗೆ ಕೊಡಲಾಗುವ ರ್‍ಯಾಂಕ್‌ಗಳು ಪುನರಾವರ್ತವಾಗುತ್ತದೆ. ಆಗ ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಬೇಕು.

$$R = 1 - \frac{6\sum d^2 + \frac{1}{12}(m^3 - m)}{N^3 - N}$$

ಇಲ್ಲಿ m- ಎನ್ನುವುದು ಪ್ರತಿ ರ್‍ಯಾಂಕ್ ಎಷ್ಟುಬಾರಿ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಎಂಬುದನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಉದಾಹರಣೆ1

					D^2=(R1-R2)
	X	R_1	Y	R_2	D^2
A	15	2	40	6	16.00
B	20	3.5	30	4	0.25
C	28	5	50	7	4.00
D	12	1	30	4	9.00
E	40	6	20	2	16.00
F	60	7	10	1	36.00
G	20	3.5	30	4	0.25
H	80	8	60	8	0.00
N = 8					$\Sigma D^2 = 81.5$

$$R = 1 - 6\Sigma d^2 \frac{6\left\{\Sigma d^2 + \frac{1}{12}\left(m_1^3 - m_1\right) + \frac{1}{12}\left(m_2^3 - m_2\right)\right\}}{\left(N^3 - N\right)}$$

$m_1 = 2, \qquad m_2 = 3$

$$R = 1 - \frac{6\left\{81.5 + \frac{1}{12}\left(2^3 - 2\right)\frac{1}{12}\left(3^3 - 3\right)\right\}}{8^3 - 8}$$

$$= 1 - \frac{6(81.5 + 0.5 + 2)}{504} = 1 - \frac{6X84}{504} = 1$$

ಉದಾಹರಣೆ2.

ಮೈಕ್ರೋ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದ ಅಂಕಗಳು:X: 50 60 70 70 50 60 80 90 55 45

ಮ್ಯಾಕ್ರೋ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದ ಅಂಕಗಳು:Y: 70 80 60 50 40 30 20 90 55 50

X	Y	R1	R2	d	d2
50	70	8.5	3	5.5	30.25
60	80	5.5	2	3.5	12.25
70	60	3.5	4	-0.4	0.16
70	50	3.5	6.5	-3.0	9.00
50	40	8.5	8	0.5	0.25
60	30	5.5	9	-3.5	12.25
80	20	2	10	-8	64.00
90	90	1	1	0	0
55	55	7	5	2	4.0
45	50	10	6.5	3.5	12.25
					$\Sigma d^2 = 144.41$

X ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ 50, 2ಬಾರಿ 60, 2 ಬಾರಿ 70, 2ಬಾರಿ ಪುನಾವರ್ತನೆಯಾಗಿದೆ.
Y ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ 50, 2 ಬಾರಿ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕಾದ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ $\frac{1}{12}(m^3-m)$ ಅನ್ನು 4ಬಾರಿ ಸೇರಿಸಬೇಕು.

$$R = 1 - \frac{6\left\{\Sigma d^2 + \frac{1}{12}\left(2^3-2\ \right) + \frac{1}{12}\left(2^3-2\right) + \frac{1}{12}\left(2^3-2\right) + \frac{1}{12}\left(2^3-2\right)\right\}}{N\left(N^2-1\right)}$$

$m_1 = 2, \qquad m_2 = 3$

$$R \ = \ 1 - \frac{6\left\{(144.41) + \frac{1}{10}(6) + \frac{1}{10}(6) + \frac{1}{10}(6) + \frac{1}{10}(6) + \frac{1}{10}(6)\right\}}{990}$$

$= 1 - 0.87$

$R = 0.13$

24.5 ವಿಚಲನ ಸೂಚಿ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕ

ಈ ಕ್ರಮ ಅತ್ಯಂತ ಸುಲಭವಾಗಿ ಸಹ ಸಂಭಂದವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನವಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಕ್ಲಿಷ್ಟವಾದ ಯಾವ ಗಣಿತೀಯ ಸೂತ್ರವನ್ನೂ ಬಳಸದೆ ಅತ್ಯಂತ ಶೀಘ್ರುವಾಗಿ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಬಳಸುವ ಸೂತ್ರ

$$r = \pm\sqrt{\frac{\pm 2c - N}{N}}$$

ಇಲ್ಲಿ r = ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕ

N = ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

C = ಸಂಖ್ಯಾ ಶ್ರೇಣಿಯ ಎರಡು ಚಲಗಳಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಧನಾತ್ಮಕ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆಯೋ ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಮೊತ್ತ.

ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ವರ್ಷ:	1998	1999	2000	2001	2002	2003
ನೀಡಿಕೆ(ಘಟಕಗಳಲ್ಲಿ)	200	300	360	400	560	564
ಬೆಲೆ (ರೂ. ನಲ್ಲಿ)	50	60	70	80	90	100

ವರ್ಷ	ನೀಡಿಕೆ	ವಿಚಲನ ಸೂಚಿ dx	ಬೆಲೆ	ವಿಚಲನ ಸೂಚಿ dy	dx.dy
1998	200	-	50	-	-
1999	300	+	60	+	+
2000	360	+	70	+	+
2001	400	+	80	+	+
2002	560	+	90	+	+
2001	564	+	100	+	+
					C = 5

$$r = \pm\sqrt{\pm\frac{(2c-n)}{N}}$$

$$= \pm\sqrt{\pm\frac{(2 x 5-6)}{6}}$$

$$\pm\sqrt{\pm\frac{(10-6)}{6}}$$

$$\pm\sqrt{\frac{4}{6}}$$

$$r = \sqrt{0.66}$$

$$r = 0.81$$

ಮೇಲೆ ನಾವು ಗಮನಿಸುವಂತೆ, ವಿಚಲನ ಸೂಚಿಯ ಮೂಲಕ ಸಹ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಅತ್ಯಂತ ಶೀಘ್ರವಾಗಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಇದಕ್ಕೆ ಯಾವ ರೀತಿಯ ಹೆಚ್ಚಿನ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರವನ್ನೂ ಮಾಡಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ. ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯ ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದ್ದರೆ + ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಇದ್ದರೆ - ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ನೀಡಿ, ಗುಣಲಬ್ಧ+ಆಗಿರುವ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿದರೆ ಸಾಕು. ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿದು ಬಿಡಬಹುದು.

24.6 ಸಾರಾಂಶಿಸೋಣ

ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನಾವು, ಕಾರ್ಲ್ ಪಿಯರ್ ಸನ್‌ರವರ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕ, ಸ್ಪಿಯರ್‌ಮನ್‌ರವರ ರ‍್ಯಾಂಕ್ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕ ಮತ್ತು ವಿಚಲನ ಸೂಚಿ ಕ್ರಮದ ಮೂಲಕ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕಗಳ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡುವ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಕಲಿತು ಕೊಂಡೆವು. ಇವುಗಳ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಸಾರಾಂಶಿಸೋಣ;

1. ಕಾರ್ಲ್ ಪಿಯರ್‌ಸನ್ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕ

$$r = \frac{N\Sigma fd_x.dy - \Sigma fd_x.\Sigma fdy}{\sqrt{\left\{N\Sigma fdx^2 - \left(\Sigma fdx\right)^2\right\}\left\{N\Sigma fdy^2 - \left(\Sigma f.dy\right)^2\right\}}}$$

2. ಸ್ಪಿಯರ್‌ಮನ್‌ರವರ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕ

$$R = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{N(N^2-1)}$$

(ii)Xಮತ್ತು Y ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ರ‍್ಯಾಂಕುಗಳು ಪುನರಾವರ್ತವಾಗಿದ್ದರೆ ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕಾದ ಸೂತ್ರ

$$R = 1 - \frac{6\Sigma d^2 + \frac{1}{12}\left(m^3 - m\right)}{N(N^2-1)}$$

ಇಲ್ಲಿ m- ಸಂಖ್ಯಾ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟುಬಾರಿ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗಿದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

(3) ವಿಚಲನ ಸೂಚಿ ಕ್ರಮದ ಮೂಲಕ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕ

$$r = \pm\sqrt{\frac{\pm 2c - N}{N}}$$

24.7 ನಿಮ್ಮ ಅಭ್ಯಾಸಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

1. ಕಾರ್ಲ್ ಪಿಯರ್‌ಸನ್, ಸ್ಪಿಯರ್ ಮನ್‌ವರವರ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕಗಳ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ನೀಡಿ

2.ಕೆಳಗಿನ ನ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಕಾರ್ಲ್‌ಪಿಯರ್‌ಸನ್‌ರವರ ಸಹ ಸಂಬಂಧಗುಣಾಂಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿ

ಹಾಲು ಉತ್ಪಾದನೆ(000ಲೀಟರ್‌ಗಳು)X:	10	15	40	50	65	70
ಮಾರಾಟದ ಬೆಲೆ(ಲೀಟರ್ ಒಂದಕ್ಕೆ)Y:	10	11	11	11	12	13

3. ಕೆಳಗಿನ ನ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಸ್ಪಿಯರ್‌ಮನ್‌ರವರ ರ್‍ಯಾಂಕ್ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿ

R_1:	10	8	6	2	1	3	4	5	7	9
R_2:	10	7	6	1	2	5	3	8	4	9

24.8 ಮುಂದಿನ ಓದಿಗಾಗಿ

D.N. Elhance: Fundamentals of Statistics - ch -11

ಘಟಕ -25

ಸಮಾಶ್ರಯಣದ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ

(Regression Analysis)

25.1 ಪೀಠಿಕೆ

25.2 ಸಮಾಶ್ರಯಣದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

25.3 ಸಮಾಶ್ರಯಣದ ಉದ್ದೇಶಗಳು

25.4 ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಮತ್ತು ಸಮಾಶ್ರಯಣಗಳ ನಡುವಣ ವ್ಯತ್ಯಾಸ

25.5 ಸರಳರೇಖೆ ಬಿಂಬಕ ಸಮಾಶ್ರಯಣ

25.6 ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಸಮೀಕರಣಗಳು

25.7 ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಗುಣಾಂಕಗಳು

25.8 ಸಾಧ್ಯ ತಪ್ಪುಗಳು

25.9 ಸಾರಾಂಶಿಸೋಣ

25.10 ಮುಖ್ಯ ಪರಿಭಾವನೆಗಳು

25.11 ಸ್ವ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

25.12 ಮುಂದಿನ ಓದಿಗಾಗಿ

ಘಟಕ -25

ಸಮಾಶ್ರಯದ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ

(Regression Analysis)

25.1 ಪೀಠಿಕೆ

ಹಿಂದಿನ ಎರಡು ಘಟಕಗಳಲ್ಲಿ ನಾವು ಎರಡು ಚಲಗಳ ಸಹ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ನೋಡಿದೆವು. ಸಹ ಸಂಬಂಧದ ಜೊತೆಗೇ ಕಲಿಯಬೇಕಾದ ವಿಷಯವೆಂದರೆ ಸಮಾಶ್ರಯಣ. ಎರಡು ಸಹ ಸಂಬಂಧವಿರುವ ಚಲಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುವಾಗ ಒಂದು ಚಲ ಬದಲಾದಾಗ ಮತ್ತೊಂದು ಚಲ ಯಾವ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ಅನುಭವಿಸುತ್ತಿದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಸಮಾಶ್ರಯಣ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯಲ್ಲಿ ಪರಿಶೀಲಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ $Y = f(x)$ಎಂಬ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ x- ಸ್ವ ತಂತ್ರ ಚಲ ಮತ್ತು Y- ಅವಲಂಬಿಚಲ. xಬದಲಾದಾಗಲೆಲ್ಲ y- ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ x ಎನ್ನುವುದುಅವಲಂಬಿ ಚಲವಾಗಿದ್ದು, y ಸ್ವತಂತ್ರ ಚಲವಾದರೆ y, ಬದಲಾದಾಗ. x ಹೇಗೆ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಸಮಾಶ್ರಯಣ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯಲ್ಲಿ ಕಲಿಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

25.2 ಸಮಾಶ್ರಯಣದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

"ಒಂದು ಕೊಡಲಾಗಿರುವ ಚಲದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಆಧಾರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಅದನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿರುವ ಚಲದ ಸಂಭವನೀಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡುವುದೇ ಸಮಾಶ್ರಯಣ"

ಉದಾಹರಣೆಗೆ $Qd = f(p)$ಎನ್ನುವ ಬಿಂಬಕದಲ್ಲಿ Qd-ಬೇಡಿಕೆ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಮತ್ತುpಬೆಲೆಯನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿದರೆ, ಗೊತ್ತಾದ ಬೆಲೆ ಮಟ್ಟದಲ್ಲಿ ನಿರೀಕ್ಷಿತ ಬೇಡಿಕೆಯ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಸಮಾಶ್ರಯಣ ವಿಶ್ಲೇಷಣೇಯಲ್ಲಿ ಮಾಡಲಾಗುತ್ತದೆ.

25.3 ಸಮಾಶ್ರಯಣದ ಉದ್ದೇಶಗಳು:

ಸಮಾಶ್ರಯಣ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಗೆ ಮೂರು ಮುಖ್ಯವಾದ ಉದ್ದೇಶಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳೆಂದರೆ;

1. ಗೊತ್ತಾದ ಸ್ವತಂತ್ರ ಚಲದ ಬೆಲೆಗೆ, ಅವಲಂಬಿ ಚಲದ ಸಂಭವನೀಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡುವುದು.
2. ಹೀಗೆ ಅಂದಾಜು ಮಾಡುವಾಗ ಉಂಟಾಗ ಬಹುದಾದ ಸಂಭವನೀಯ ತಪ್ಪುಗಳನ್ನು ಸಹ ನಿಗದಿ ಮಾಡುವುದು.
3. ಸಮಾಶ್ರಯಣದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಎರಡು ಚಲಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವುದು.

25.4 ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಮತ್ತು ಸಮಾಶ್ರಯಣಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ

ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಪರಿಭಾವನೆಗಳ ನಡುವೆ ಎರಡು ಮುಖ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳೆಂದರೆ,

1. ಎರಡು ಚಲಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ದಿಕ್ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಅಳತೆ ಮಾಡಿದರೆ, ಎರಡು ಚಲಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಅವಲಂಬಿ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಸಮಾಶ್ರಯಣ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುತ್ತದೆ.

2. ಸಮಾಶ್ರಯಣ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಚಲಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಕಾರ್ಯ ಕಾರಣ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಸಹ ವಿಶ್ಲೇಷಿಸುತ್ತದೆ. ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಇದನ್ನು ಮಾಡುವುದಿಲ್ಲ. ಅದು ಕೇವಲ ಎರಡು ಚಲಗಳು ಯಾವ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಮಾತ್ರ ವಿಶ್ಲೇಷಿಸುತ್ತದೆ.

25.5 ಸರಳರೇಖೆ ಬಿಂಬಕ ಸಮಾಶ್ರಯಣ:Linear Regression

ಎರಡು ಚಲಗಳ ನಡುವೆ $Y = a + bx$ ರೂಪದ ಸಂಬಂಧ ವಿದ್ದರೆ, ಮತ್ತು ಕೊಡಲಾಗಿರುವ Xಬೆಲೆಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ, ಸಂಭವನೀಯ yಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಸರಳರೇಖೆ ಬಿಂಬಕ ಸಮಾಶ್ರಯಣ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

25.6 ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಸಮೀಕರಣಗಳು

ಈ ಮೊದಲೇ ಸೂಚಿಸಿದಂತೆ xಮತ್ತು yಗಳ ನಡುವಣ ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಸಂಬಂಧ

Y = a+ bxರೂಪದಲ್ಲಿ ಅಥವಾ
X = a + by ರೂಪದಲ್ಲಿ ಆಗಬಹುದು.

ಇವೆರಡು ಸರಳ ರೇಖೆಗಳು ಎನ್ನುವುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಅಂದರೆ x ಮತ್ತು yಗಳು ಅವಲಂಬಿ ಚಲಗಳಾಗಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡು ಚಲಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಎರಡು ಸಮಾಶ್ರಯಣ ರೇಖೆಗಳು ಇರುತ್ತವೆ. Xಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸಮಾಶ್ರಯಣರೇಖೆ, yನ ಬೆಲೆ ಬದಲಾವಣೆಗೆ xಸರಾಸರಿಯಾಗಿ ಯಾವ ಸಂಭವನೀಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಮತ್ತು xನ ಬೆಲೆ ಬದಲಾವಣೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ y ಸರಾಸರಿ ಯಾವ ಸಂಭವನೀಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು y ಸಮಾಶ್ರಯಣ ರೇಖೆ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತದೆ.

ಎರಡು ಸಮಾಶ್ರಯಣ ರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಕೊಡಬಹುದು.

$$X-\overline{X}= r\,\frac{\sigma x}{\sigma y}\left(Y-\overline{Y}\right)$$ - X ಸಮಾಶ್ರಯಣ ರೇಖೆ ....(1)

$$Y-\overline{Y}= r\,\frac{\sigma x}{\sigma y}\left(X-\overline{X}\right)$$ - Y ನ ಸಮಾಶ್ರಯಣ ರೇಖೆ......(2)

ಇಲ್ಲಿ $\overline{X}, \overline{Y},$ x ಮತ್ತು y ಗಳ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಗಳಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಗಳು

r = x ಮತ್ತು y ಗಳ ನಡುವಣ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕ

$\sqrt{X}$ -Xಶ್ರೇಣಿಯ ಮಾನಕ ವಿಚಲನ

$\sqrt{Y}$ -Yಶ್ರೇಣಿಯ ಮಾನಕ ವಿಚಲನ

25.7 ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಗುಣಾಂಕಗಳು:

ಮೇಲಿನ ಸಮಾಶ್ರಯಣರೇಖೆ (1)ರಲ್ಲಿನ $r=\frac{\sigma x}{\sigma y}$ಯನ್ನು bxyಎಂದು ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಅದನ್ನು y ಮೇಲೆ xನ ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಗುಣಾಂಕ (regression coefficient of x on Y) ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಹಾಗೆಯೇ $r=\frac{\sigma Y}{\sigma X}$ಅನ್ನು y ಮೇಲೆ x ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಗುಣಾಂಕ (regression coefficient of y on x)ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. bxy ಮತ್ತು byxಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಕ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲಾಗುತ್ತದೆ.

$$bxy = \frac{\Sigma\, dx.dy - \frac{\Sigma\, dx.\Sigma\, dy}{N}}{\Sigma\, dy^2 - \frac{(\Sigma\, dy)^2}{N}}$$ ....x ನ ಮೇಲೆ y ನ ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಗುಣಾಂಕ

$$byx = \frac{\Sigma\, dx.dy - \frac{\Sigma\, dx.\Sigma\, dy}{N}}{\Sigma\, dx^2 - \frac{(\Sigma\, dx)^2}{N}}$$ ....y ನ ಮೇಲೆ x ನ ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಗುಣಾಂಕ

2

ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಸರಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$X-\overline{X} = bxy\left(Y-\overline{Y}\right)$ ....xನ ಸಮಾಶ್ರಯಮ ಸಮೀಕರಣ

$Y-\overline{Y} = bxy\left(X-\overline{X}\right)$ ....yನ ಸಮಾಶ್ರಯಮ ಸಮೀಕರಣ

ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ, xಮತ್ತು yಗಳ ನಡುವಣ ಸಹ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಕ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು.

$$r = \pm\sqrt{bxy \ X \ byx}$$

ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ, ಸಮಾಶ್ರಯಣ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: ಕೆಳಗೆ ಕಾರುಗಳ ವಯಸ್ಸು ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಸರಿಯಾಗಿ ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಲು ಪ್ರತಿ ವರ್ಷ ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಕಾರುಗಳ ವಯಸ್ಸಿನ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ತಗಲುವ ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರಚಿಸಿ. 3ವರ್ಷ ಹಳೆಯ ಕಾರಿಗೆ ತಗಲುವ ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡೋಣ:

ಕಾರುಗಳ ವಯಸ್ಸು ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ (x):	2	5	6	7	8	10	11
ವರ್ಷಕ್ಕೆ ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚ (ರೂಗಳಲ್ಲಿ)(y):	1600	1700	1800	1900	2000	2100	2200

x	y	dy(1900)	dx	dx^2	dy^2	dx.dy
2	1600	-300	-5	25	90000	1500
5	1700	-200	-2	4	40000	400
6	1800	-100	-1	1	10000	100
7	1900	0	0	0	0	0
8	2000	100	1	1	10000	100
10	2100	200	4	9	40000	600
11	2200	300	3	16	90000	1200
$\Sigma x = 49$	$\Sigma y = 13300$	$\Sigma dy = 0$	$\Sigma dx = 0$	56	280000	3900

$$\overline{X} = \frac{\Sigma x}{N} = \frac{49}{7} = 7$$

$$\overline{y} = \frac{\Sigma y}{N} = \frac{13300}{7} = 1900$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{\frac{\Sigma dx^2}{N}} = \sqrt{\frac{56}{7}} = \sqrt{8} = 2.8$$

$$\sqrt{y} = \sqrt{\frac{\Sigma dy^2}{N}} = \sqrt{\frac{280000}{7}} = 200$$

$$r = \frac{\Sigma dx.dy}{n\sqrt{x}\sqrt{y}} = \frac{3900}{7 \ X 2.8 \ X 200} = 0.99$$

ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಕಾರಿಗೆ ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚ y ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಕಾರಿನ ಆಯಸ್ಸು xನ ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಸಮೀಕರಣ

$$Y - \overline{Y} = r.\frac{\sigma \ y}{\sigma \ x}\left(x - \overline{x}\right)$$

$$Y - 1900 = 0.99\,\frac{200}{2.8}(x - 7)$$

$$Y = 70.7 \ X + 1405.1$$

3ವರ್ಷ ಹಳೆಯ ಕಾರನ್ನು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಲು ತಗಲುವ ಖರ್ಚು

Y = 70.7(3)+1405.1

Y = 212.1+1405.1

Y = ರೂ 1617.2

ಉದಾಹರಣೆ x ಮತ್ತು y ಚಲಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಕೆಳಗಿನ ನ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕ ಮತ್ತು ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

X:	22	24	26	26	27	27	28	28
Y:	18	20	20	24	22	27	24	21

x	dx $\left(x - \overline{x}\right)_{22}$	dx^2	y	dy(18)	dy^2	dx.dy
22	0	0	18	0	0	0
24	2	4	20	2	4	4
26	4	16	20	2	4	8
26	4	16	24	6	36	24
27	5	25	22	4	16	20
27	5	25	24	9	81	45
28	6	36	24	6	36	36
28	6	36	21	3	9	18
	Σdx = 27	158	176	32	186	155

$\sigma x = 2.89, \qquad \sigma y = 2.69$

$$r = \frac{\frac{155}{8} - \frac{27}{8} X \frac{32}{8}}{\sqrt{\left\{\frac{158}{8} - \left(\frac{27}{8}\right)^2\right\}\left\{\frac{186}{8} - \left(\frac{32}{8}\right)^2\right\}}}$$

$r = 0.76$

ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$Y - \overline{Y} = r.\frac{\sigma\ y}{\sigma\ x}\left(x - \overline{x}\right)$$

$$Y - 40 = 0.76\ X\ \frac{2.69}{2.89}(x - 48)$$

$$(Y - 40) = 0.76\ (x - 48)$$

$$Y = 0.76\ x - 33.5 + 40$$

$$Y = 0.76\ x + 6.5$$

$$x - \overline{x} = r.\frac{\sigma\ x}{\sigma\ y}\left(y - \overline{y}\right)$$

$$(x - 48) = 0.76\ X\ \frac{2.89}{2.69}(y - 40)$$

$$x = 48 + 0.8\ y - 32$$

$$x = 0.8\ y + 16$$

ಉದಾಹರಣೆ:

xಮತ್ತು y ಎರಡು ಚಲಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಕೆಳಗಿನ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಎರಡು ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. Y = 70 ಆದಾಗ , x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡಿ.

$\overline{x} = 65, \qquad \overline{y} = 67 \qquad r = 0.8,$

$\sigma x = 2.5, \qquad \sigma y = 3.5,$

x ನ ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಸಮೀಕರಣ

$$x - \overline{x} = r.\frac{\sigma\ x}{\sigma\ y}\left(y - \overline{y}\right)$$

$$(x - 65) = 0.8\ X\ \frac{2.5}{3.5}(y - 67)$$

$$x - 65 = 0.57\ y - 38.19$$

$$x = 0.57\ y + 26.81$$

y ನ ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಸಮೀಕರಣ

$$Y - \overline{Y} = r.\frac{\sigma\ y}{\sigma\ x}\left(x - \overline{x}\right)$$

$$Y - 67 = 0.8\,X\ \frac{3.5}{2.5}(x - 65)$$

y- 67 = 1.12 X -72.80

Y = 1.12 X -72.80

Y = 70, ಆದಾಗ

X = 0.57 X 70 + 26.81

Y = 66.71

25.8 ಸಾಧ್ಯ ತಪ್ಪುಗಳು:(Standard Errors)

xನ ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಳಸಿ Y- ಬೆಲೆಗೊತ್ತಿರುವಾಗ, Xನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಹಾಗೆಯೇ Xನ ಬೆಲೆ ಗೊತ್ತಿರುವಾಗ Y ಸಮಾಶ್ರಯಣಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಳಸಿ, Yಬೆಲೆಯನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಇಂತಹ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ವಲ್ಪ ಮಟ್ಟಿಗಿನ ಸಂಭವನೀಯ ತಪ್ಪುಗಳಾಗುವುದು ಸಹಜ. ಎಷ್ಟು ತಪ್ಪಾಗಿರಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ಸಾಧ್ಯ ತಪ್ಪುಗಳ ಸೂತ್ರ (Standard Error)ದಿಂದ ಅಳತೆ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳೆಂದರೆ

$$Sy = \sigma y\sqrt{1 - r^2}$$
$$Sx = \sigma x\sqrt{1 - r^2}$$

Sy-yನ ಮತ್ತು Sx - xನ ಸಾಧ್ಯ ತಪ್ಪುಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದ, 48 ಫಾರಂಗಳಲ್ಲಿ ಗೋಧಿ(x) ಮತ್ತು ಆಲೂಗೆಡ್ಡೆ (y) ಬೆಲೆಗಳ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಕೆಳಗಿನಂತಿವೆ.

$\overline{x} = 15.79$ $\overline{y} = 6.07$

X ನ ಮಾನಕ ವಿಚಲನ = 2 ,y, ನ ಮಾನಕ ವಿಚಲನ = 0.7

X ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಮತ್ತು y ಸಮಾಶ್ರಯಣಗಳ ಸಾಧ್ಯ ತಪ್ಪುಗಳನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡಿ

X ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಸಾಧ್ಯ ತಪ್ಪು

$$S_x = \sigma x\sqrt{1 - r^2}$$
$$= 2\sqrt{1 - (0.2)^2}$$
$$= 2\sqrt{1 - 0.04}$$
$$= 2\sqrt{10 - 0.06}$$

Y ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಸಾಧ್ಯ ತಪ್ಪು

$$Sy = \sigma y\sqrt{1-r^2}$$
$$= 0.7\sqrt{1-(0.04)}$$
$$= 0.7\sqrt{0.96}$$

25.9 ಸಾರಾಂಶಿಸೋಣ

ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನಾವು ಸಮಾಶ್ರಯಣ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯನ್ನು ಪರಿಚಯ ಮಾಡಿಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಅವಲಂಬಿ ಚಲದ ಸಮಾಶ್ರಯಣದ ಸಾರಾಂಶವೆಂದರೆ, ಕೊಡಲಾಗಿರುವ ಸ್ವತಂತ್ರ ಚಲಕ್ಕೆ ಅವಲಂಬಿ ಚಲದ ಸಂಭವನೀಯ ಸರಾಸರಿ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡುವುದು ಎರಡು ಚಲಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಎರಡು ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಸಮೀಕರಣಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಏಕೆಂದರೆ, ಎರಡರಲ್ಲಿ ಒಂದು, ಅವಲಂಬಿ ಚಲವಾಗಿದ್ದು ಮತ್ತೊಂದು ಸ್ವತಂತ್ರ ಚಲವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಎರಡು ಚಲಗಳ ನಡುವೆ Y = a + bx ರೂಪದ ಸರಳರೇಖೆ ಸಂಬಂಧವಿದ್ದರೆ, ಎರಡು ಚಲಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಎರಡು ಸಮಾಶ್ರಯಣ ರೇಖೆಗಳಿರುತ್ತವೆ.

ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸಾರಾಂಶಿಸಬಹುದು.

x- ಚಲದ ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಸಮೀಕರಣ;

$$x - \bar{x} = r.\frac{\sigma\ x}{\sigma\ y}\left(y - \bar{y}\right)$$

Y ಚಲದ ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಸಮೀಕರಣ

$$Y - \bar{Y} = r.\frac{\sigma\ y}{\sigma\ x}\left(x - \bar{x}\right)$$

ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಗುಣಾಂಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$bxy = r.\frac{\sigma x}{\sigma y}$$

$$byx = r.\frac{\sigma y}{\sigma x}$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮೀಕರಣ (1) (2)ನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$x - \bar{x} = r.bxy\ \left(y - \bar{y}\right)$$
$$y - \bar{y} = r.byx\ \left(x - \bar{x}\right)$$

ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕದ ಸಮೀಕರಣ

$$r = \pm\sqrt{bxy\ \ X\ byx}$$

ಎರಡು ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಕೊಡಲಾಗಿರುವ Xಬೆಲೆಗೆ ಅಂದಾಜು Y ಬೆಲೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಕೊಡಲಾಗಿರುವ Y ಬೆಲೆ ಗೆ Xನ ಅಂದಾಜು ಬೆಲೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು.

ಮೇಲಿನ ರೀತಿಯ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ತಪ್ಪುಗಳನ್ನು 'ಸಾಧ್ಯತಪ್ಪು'ಗಳು ಎಂದು ಕರೆದು ಅವುಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು. ಅವುಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳೆಂದರೆ

$$Sx = \sigma x \sqrt{1 - r^2}$$
$$Sy = \sigma y \sqrt{1 - r^2}$$

25.10 ಮುಖ್ಯ ಪರಿಭಾವನೆಗಳು

X - ನ ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಸಮೀಕರಣ

Y - ನ ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಸಮೀಕರಣ

ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಗುಣಾಂಕ

ಸಾಧ್ಯ ತಪ್ಪುಗಳು

25.11 ಸ್ವ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

1. ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಎಂದರೇನು ? ಇದರ ಉಪಯೋಗವೇನು?

2. ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಮತ್ತು ಸಹ ಸಂಬಂಧಗಳ ನಡುವಣ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೇನು?

3. ಕೆಳಗಿನ ನ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಎರಡು ಸಮಾಶ್ರಯಣ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ.

X:	14	12	10	5	8	4	2
Y:	10	12	5	8	3	1	1

4. ಕೆಳಗಿನ ಮಾಹಿತಿಯ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಎರಡು ಸಮಾಶ್ರಯಣ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ.

$$\bar{x} = 35, \qquad \bar{y} = 25$$
$$\sigma x = 5, \qquad \sigma y = 3$$
$$r = 0.6$$

25.12 ಮುಂದಿನ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ

D.N. Elhance : Fundamentals of Statistics, ಅಧ್ಯಾಯ 12

ಬ್ಲಾಕ್ - 6.

ಯೂನಿಟ್ - 26.

ಸಮಯ ಶ್ರೇಣಿ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ

26.1 ಪೀಠಿಕೆ

26.2 ಸಮಯ ಶ್ರೇಣಿಯ ಘಟಕಗಳು

26.3 ಸಮಯ ಶ್ರೇಣಿಯ ವ್ಯತಯಗಳನ್ನು ಹೋಗಲಾಡಿಸುವ ವಿಧಾನಗಳು

26.4 ಮುಕ್ತ ರೇಖೆ ವಿಧಾನ

26.5 ಸಮ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ

26.6 ಚಲಿಸುವ ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ

26.7 ನಿಮ್ಮ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ

26.8 ಕೊಡಲಾಗಿರುವ ದತ್ತಕ್ಕೆ 'ಲೀಸ್ಟ್ ಸ್ಕ್ವೇರ್'ವಿಧಾನದಿಂದ ಸರಳರೇಖೆಯ ಅನ್ವಯ ವಿಧಾನ

26.9 ಸಾರಾಂಶಿಸೋಣ

26.10 ಮುಖ್ಯ ಪರಿಭಾವನೆಗಳು

26.11 ಸ್ವ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

26.12 ಮುಂದಿನ ಓದಿಗಾಗಿ

ಯೂನಿಟ್ - 26.

ಸಮಯ ಶ್ರೇಣಿ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ

26.1 ಪೀಠಿಕೆ:

ಯಾವುದೇ ಅರ್ಥಿಕ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ನಾವು ದೀರ್ಘಕಾಲದವರೆಗೆ ಗಮನಿಸಿದರೆ, ಈ ಕ್ರಿಯೆ ಏರುಪೇರುಗಳನ್ನು ಅನುಭವಿಸಿರುವುದನ್ನು ನೋಡುತ್ತೇವೆ. ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಯಾವುದೇ ಅರ್ಥಿಕ ಕ್ರಿಯೆಯ ಮುಖ್ಯ ಲಕ್ಷಣವೆಂದರೆ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಅನುಭವಿಸುವುದು. ಇದಕ್ಕೆಅನೇಕ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನಾವು ನೋಡಬಹುದು. ಒಂದು ಸರಕಿನ ಬೇಡಿಕೆಯ ಪ್ರಮಾಣ, ಉತ್ಪಾದನೆ, ಲಾಭ, ಹಣದುಬ್ಬರ ಇವೆಲ್ಲವೂ ಕಾಲಾವಧಿಯಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳನ್ನುಭವಿಸುವಂಥಹ ಒಂದು ದೀರ್ಘಕಾಲದಲ್ಲಿ ಕ್ರಿಯೆಯ ಗತಿಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ, ಅದರಲ್ಲಿರುವ ಏರುಪೇರುಗಳನ್ನು ಸರಾಸರಿಗೊಳಿಸಿ, ಮುಂದಿನ ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಕ್ರಿಯೆ ಹೇಗೆ ನಡೆಯಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಕ್ರಿಯೆಗಳ ಸಮಯ ಶ್ರೇಣಿ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯಲ್ಲಿ ಮಾಡಲಾಗುತ್ತದೆ.

26.2 ಸಮಯ ಶ್ರೇಣಿಯ ಘಟಕಗಳು

ಒಂದು ಅರ್ಥಿಕ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳು ಅನೇಕ ಕಾರಣಗಳಿಂದ ಉಂಟಾಗಬಹುದು. ಈ ಕಾರಣಗಳನ್ನು ಸಮಯ ಶ್ರೇಣಿಯ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ 4ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

1. ಋತುಮಾನದ ಕಾರಣಗಳಿಂದ ಆರ್ಥಿಕ ಕ್ರಿಯೆ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗೊಳ್ಳಬಹುದು.(Seasonal Fluctuations)
2. ಅವರ್ತಕಾರಣಗಳಿಂದ ಆರ್ಥಿಕ ಕ್ರಿಯೆ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗೊಳ್ಳಬಹುದು(Cyclical Fluctuations)
3. ಅನಿಶ್ಚಿತ ಕಾರಣಗಳಿಂದ ಆರ್ಥಿಕ ಕ್ರಿಯೆ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗೊಳ್ಳಬಹುದು. (Random Fluctuations)
4. ದೀರ್ಘಾವಧಿಯ ಅನೇಕ ಕಾರಣಗಳಿಂದ ಒಂದು ಕ್ರಿಯೆ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗೊಳ್ಳಬಹುದು. (Fluctuations due to Secular reasons)

ಇವುಗಳನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ವಿವರವಾಗಿ ನೋಡೋಣ.

1) ಋತುಮಾನದ ಕಾರಣಗಳಿಂದ ಸಮಯ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ಯಯ: ಅನೇಕ ಅರ್ಥಿಕ ಕ್ರಿಯೆಗಳು ಋತುಮಾನದ ಕಾರಣದಿಂದ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗೊಳ್ಳುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಐಸ್‌ಕ್ರೀಂ ಮಾರಾಟ, ಚಳಿಗಾಲದಲ್ಲಿ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಕೃಷಿ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ ಕಾರ್ಮಿಕರಿಗೆ ಉದ್ಯೋಗ ಬೇಸಾಯವಿಲ್ಲದಿರುವಾಗ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಇತ್ಯಾದಿ, ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳನ್ನು ನಾವು ದೀರ್ಘಾವಧಿಗೆ ಗುರುತು ಹಾಕಿದರೆ, ಅದು ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

2)ಅವರ್ತಕಾರಣ: ಅರ್ಥಿಕತೆಯೇ ಅವರ್ತಗಳನ್ನು ಅನುಭವಿಸುವುದು ಅನಿವಾರ್ಯವಾಗಿರುವಾಗ ಎಲ್ಲಾ ಅರ್ಥಿಕ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳೂ ಇದರ ಪ್ರಭಾವಕ್ಕೆ ಒಳಗಾಗುತ್ತವೆ. ವಾಣಿಜ್ಯ ಕ್ರಿಯೆಗಳು, ಶೃಂಗ, ಹಿಂಜರಿತ, ಮುಗ್ಗಟ್ಟು ಮತ್ತು ಚೇತರಿಕೆಗಳನ್ನು ಅನುಭವಿಸುತ್ತಾ ಮುಂದುವರಿಯುತ್ತವೆ. ಹೀಗಾಗಿ ಈ ಕ್ರಿಯೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಅಂಕಿ-ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಹ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಅನುಭವಿಸುತ್ತವೆ.

3)ಅನಿಶ್ಚಿತತೆ ಕಾರಣಗಳು: ಒಂದು ಸಮಯ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳಿರುವುದಕ್ಕೆ ಅನಿಶ್ಚಿತತೆಗಳೂ ಕಾರಣ. ಅರ್ಥಿಕತೆಯಲ್ಲಿ ಯುದ್ಧ, ಕ್ಷಾಮ, ಅತಿವೃಷ್ಟಿ, ಮುಂತಾದವುಗಳು ಅರ್ಥಿಕ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ವ್ಯತ್ಯಾಸಗೊಳಿಸುತ್ತವೆ. ಇದರಿಂದ ನಾವು ಯಾವುದೇ ಅರ್ಥಿಕ ಚಟುವಟಿಕೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದಾಗ, ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಅದು ಅನಿಶ್ಚಿತತೆ ಕಾರಣದಿಂದ ಏರು ಪೇರುಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ದೀರ್ಘಾವಧಿ ಒಲವುಗಳು:ಯಾವುದೇ ಅರ್ಥಿಕ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಾವು ದೀರ್ಘವಧಿಗೆ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ್ದರೂ, ಅದರಲ್ಲಿ ಸಹಜವಾಗಿ ಅನೇಕ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳು ಉಂಟಾಗುತ್ತಾ ಮುಂದುವರೆದಿರುವುದನ್ನು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಬಹಳ ಕಾರಣಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಇದನ್ನು ಅಂಕಿ -ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದೀರ್ಘಾವಧಿ ಒಲವು (Secular Trend)ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಮೇಲಿನ ಕಾರಣಗಳಿಂದ ಅಂಕಿ-ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಏರು-ಪೇರುಗಳನ್ನು ಹೋಗಲಾಡಿಸಿಕೊಂಡು, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ರೀತಿಯ ಸರಾಸರಿ ಒಲವನ್ನು ಉಂಟು ಮಾಡಿ ಅದರಿಂದ ಭವಿಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಆರ್ಥಿಕ ಕ್ರಿಯೆ ಹೇಗೆ ಮುಂದುವರಿಯುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸುವುದು ಸಮಯ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮುಖ್ಯವಾದ ಉದ್ದೇಶ. ಈಗ ನಾವು ಸಮಯಶ್ರೇಣಿಯ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳಲ್ಲಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಹೋಗಲಾಡಿಸುವ ಕ್ರಮಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.

26.3 ಸಮಯಶ್ರೇಣಿಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಹೋಗಲಾಡಿಸುವ ಕ್ರಮಗಳು

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ನಾಲ್ಕು ಕ್ರಮಗಳ ಮೂಲಕ ಸಮಯ ಶ್ರೇಣಿಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಹೋಗಲಾಡಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅವುಗಳೆಂದರೆ

1) ಮುಕ್ತ ಹಸ್ತರೇಖಾ ರಚನಾಕ್ರಮ (Free hand curve)
2) ಸಮ ವಿಭಜಿತ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ ಕ್ರಮ(Semi Average method)
3) ಚಲಿಸುವ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ ಕ್ರಮ (Moving Average Method)
4) ಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಅಂಕಿ-ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ರೇಖೆಯನ್ನು ಅಳವಡಿಸುವ ಕ್ರಮ(Fitting a curve)

ಇವುಗಳನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ವಿವರವಾಗಿನೋಡೋಣ

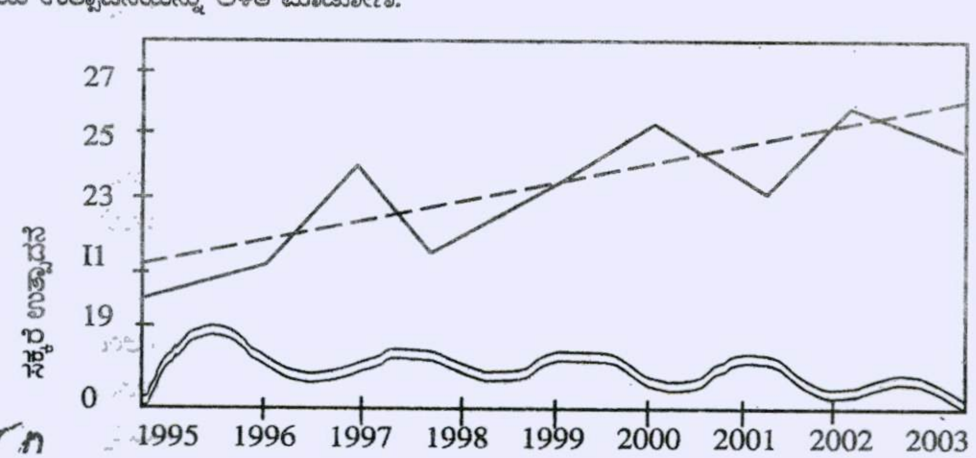
26.4 ಮುಕ್ತ ರೇಖೆ ವಿಧಾನ:

ಯಾವುದೇ ಆರ್ಥಿಕ ಚಲದ ಸಮಯ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಮೂಡಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯ. OX-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಸಮಯವನ್ನು ಮತ್ತು OY-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಚಲವನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಿ, ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಪಡೆದುಕೊಂಡು ನಂತರ ಮುಕ್ತ ಹಸ್ತದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ.ನ್ನು ಏರು-ತಗ್ಗು ಸಮಗೊಳಿಸುವಂತೆ ಎಳೆದರೆ, ಅದು ನಮಗೆ ಸಂಖ್ಯಾ ಶ್ರೇಣಿಯ ಒಲವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ.

ಅದನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ಮುಂದಿನ ವರ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಚಲದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳುವುದು ಸಾಧ್ಯ. ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ವರ್ಷ	ಸಕ್ಕರೆ ಉತ್ಪಾದನೆ(ದಶಲಕ್ಷ ಟನ್‌ಗಳಲ್ಲಿ)
1995	20
1996	22
1997	24
1998	21
1999	23
2000	25
2001	23
2002	26
2003	25

ಮೇಲಿನ ಅಂಕಿ-ಅಂಶಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಮೂಡಿಸೋಣ. 0x-ಅಕ್ಷದ ಮೆಲೆ ಸಮಯವನ್ನು ಮತ್ತು oy-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಸಕ್ಕರೆಯ ಉತ್ಪಾದನೆಯನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡೋಣ.



ಮುಕ್ತ ಹಸ್ತರೇಖೆಯ ಅನುಕೂಲಗಳು ಮತ್ತು ಅನಾನುಕೂಲಗಳು

ಅನುಕೂಲಗಳು

1. ಇದು ಅತ್ಯಂತ ಸರಳವಾದ ನಕ್ಷಾ ವಿಧಾನ
2. ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಒಲವನ್ನು ಬಹಳ ಸುಲಭವಾಗಿ ಗುರುತಿಸಬಹುದು. ಅದು ಸರಳರೇಖೆಯಾಗಬಹುದು ಅಥವಾ ವಕ್ರರೇಖೆಯಾಗಬಹುದು.
3. ಅಂಕಿ-ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮುಂದಿನ ಸರಾಸರಿ ಗತಿಯನ್ನು ನಕ್ಷೆಯಿಂದ ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿಯಬಹುದು.

ಅನಾನುಕೂಲಗಳು

1. ಇದುಮುಖ್ಯವಾಗಿ ವೈಯಕ್ತಿಕ ವಿಧಾನ
   ಏಕೆಂದರೆ ವ್ಯಕ್ತಿಗತವಾಗಿ ತೀರ್ಮಾನವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ರೇಖೆಯನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.
2. ಸಾಕಷ್ಟು ಅಂಕಿ-ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನವಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಅನುಪಯುಕ್ತವಾದ ತೀರ್ಮಾನವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.
3 ನಕ್ಷಾ ನಿರೂಪಣೆ ಎರಡು ಚಲಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಸೀಮಿತವಾಗುತ್ತದೆ.

26.5 ಸಮ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ

ಈ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಎರಡು ಸಮ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ನಮಗೆ ಲಭ್ಯವಿರುವ ಮಾಹಿತಿ 1986ರಿಂದ 2003ರವರೆಗೆ ಇದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಅಂದರೆ, 1986ರಿಂದ 1995ರವರೆಗೆ ಒಂದು ಭಾಗವಾಗಿ ಮತ್ತು 1999ರಿಂದ 2003ರವರೆಗೆ ಎರಡನೇ ಭಾಗವಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಒಂದು ಪಕ್ಷ ಸಂಖ್ಯಾ ಮಾಹಿತಿ ಬೆಸ ವರ್ಷಗಳಿಗೆ ಲಭ್ಯವಿದ್ದರೆ ಅಂದರೆ, 9,13,17ಇತ್ಯಾದಿ ವರ್ಷಗಳಿಗೆ ಲಭ್ಯವಿದ್ದರೆ ಆಗ ಮಧ್ಯಮ ವರ್ಷವನ್ನು ಅಲಕ್ಷಿಸಿ ಎರಡು ಭಾಗವಾಗಿ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ವಿಂಗಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಹೀಗೆ ವಿಭಜಿಸಿದ ನಂತರ ಪ್ರತಿಭಾಗಕ್ಕೆ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ನಂತರ ಬರುವ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಮಧ್ಯದ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ವರ್ಷಗಳಿಗೆ ಗುರುತುಮಾಡಿ, ಬರುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆದರೆ, ಅದೇ ಬೇಕಾಗಿರುವ ಸಮಯಶ್ರೇಣಿ ಸರಾಸರಿ ರೇಖೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಅಧರಿಸಿ ಮುಂದಿನ ವರ್ಷಗಳಿಗೆ ಚಲದ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ಗುರುತಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯ. ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಕೆಳಗಿನ ಮಾಹಿತಿ, ಒಂದು ಉದ್ಯಮದ ಮಾರಾಟದ ವಿವರನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ. ಸಮ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನದ ಮೂಲಕ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ರಚಿಸೋಣ.

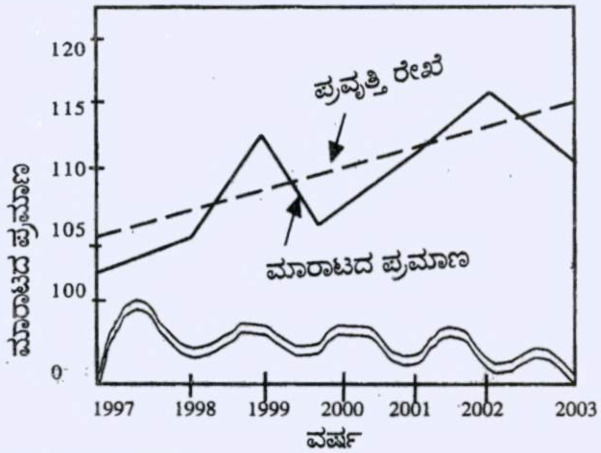
ವರ್ಷ	ಉದ್ಯಮದ ಮಾರಾಟ(000ಘಟಕಗಳಲ್ಲಿ)
1997	102
1998	105
1999	114
2000	110
2001	108
2002	116
2003	112

7ವರ್ಷಗಳಿಗೆ ಮಾಹಿತಿ ಇರುವುದರಿಂದ, ಮಧ್ಯದ ವರ್ಷವನ್ನು ಅಲಕ್ಷಿಸೋಣ. ಉಳಿದ ವರ್ಷಗಳಿಗೆ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಮೊದಲ 3ವರ್ಷದ ಸರಾಸರಿ $\frac{102+105+114}{3}=\frac{321}{3}=107$

ಮುಂದಿನ ಮೂರು ವರ್ಷದ ಸರಾಸರಿ $\frac{108+116+112}{3}=\frac{336}{3}=112$

ಆದ್ದರಿಂದ 107ಮತ್ತು 112ನ್ನು ಅವುಗಳ ಮಧ್ಯವರ್ಷಗಳಾದ 1998ಮತ್ತು 2002ರ ಎದುರಿಗೆ ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ನಮೂದಿಸಿ ಬರುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೂಲಕ ಸೇರಿಸಬೇಕು. ಕೆಳಗಿನ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಮಾಡಲಾಗಿದೆ.



ಸಮ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ ಮಿತಿಗಳು

ಈ ವಿಧಾನ ಸಮಯಶ್ರೇಣಿಗೆ ಸರಳರೇಖೆ ಬಿಂಬಕ ಸ್ವಭಾವವಿದೆ ಎಂಬ ಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಮಾಡಿಕೊಂಡು ಬಿಡುತ್ತದೆ. ಇದು ಈ ವಿಧಾನದ ದೊಡ್ಡ ದೌರ್ಬಲ್ಯ

26.6 ಚಲಿಸುವ ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ

ಈ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಗೆ ಅನೇಕ ಸರಾಸರಿಗಳನ್ನು ಅಳವಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಸರಾಸರಿಗಳನ್ನು ಸಮಯಶ್ರೇಣಿಯ ಒಲವಿನ ಮೌಲ್ಯವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಹೆಚ್ಚು ಹೆಚ್ಚು ಸರಾಸರಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಂತೆ ಸಮಯಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿನ ವ್ಯತ್ಯಯಗಳು ಸಮಗೊಳ್ಳುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತವೆಂದು ಈ ವಿಧಾನದ ಮೂಲಕಲ್ಪನೆ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ 3,5,7ವರ್ಷಗಳ ಸರಾಸರಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. 1988ಮತ್ತು 2003ರವರೆಗಿನ ಕಬ್ಬು ಉತ್ಪಾದನೆಗೆ, 3,5,ಮತ್ತು 7ವರ್ಷಗಳ ಚಲಿಸುವ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಅಳವಡಿಸಲಾಗಿದೆ.

ವರ್ಷ	ಕಬ್ಬಿನ ಉತ್ಪಾದನೆ(ದಶಲಕ್ಷ ಟನ್‌ಗಳಲ್ಲಿ)
1988	23
1989	26
1990	28
1991	32
1992	20
1993	12
1994	12
1995	10
1996	09
1997	13
1998	11
1999	14
2000	12
2001	09
2002	03
2003	01

1988	23	-	-		-
1989	26	-	-		-
1990	28	129	25.8 Or 26	-	-
1991	32	118	23.6=24	153	21.9. or 22
1992	20	104	20.8=21	140	20.0 or 20
1993	12	86	17.2=17	123	17.6=18
1994	12	63	12.6=13	108	15.4=15
1995	10	56	11.2=11	87	12.4=12
1996	09	55	11.0=11	81	11.6=12
1997	13	57	11.4=11	81	11.6=12
1998	11	59	11.8=12	78	11.6=12
1999	14	59	11.8=12	71	11.1=11
2000	12	49	9.8=10	63	10.1=10
2001	09	39	7.8=10	-	-
2002	03	-	-	-	-
2003	01	-	-	-	-

5 ವರ್ಷದ ಚಲಿಸುವ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲಾಗಿದೆ.

$$\frac{23+26+28+32+20}{5}=\frac{129}{5}=25.8 \text{ ಅಥವಾ } 26$$

$$\frac{26+28+32+20+12}{5}=\frac{118}{5}=23.6 \text{ ಅಥವಾ } 24$$

$$\frac{a+b+c+d+e}{5},\ \frac{b+c+d+e+f}{5},\ \frac{c+d+e+f+g}{5}$$

ಇತ್ಯಾದಿ, ಇದೇ ಸೂತ್ರದ ಮೇಲೆ 7 ವರ್ಷದ ಚಲಿಸವ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲಾಗಿದೆ. ಈ ಸರಾಸರಿಗಳು ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯ ಒಲವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ.

ಈ ವಿಧಾನದ ಮುಖ್ಯಮಿತಿಯೆಂದರೆ ಇದರ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಕ್ಲಿಷ್ಟವಾದುದು. ಜೊತೆಗೆ ಇದರಿಂದ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯ ತುಂಬಾ ಸ್ಪಷ್ಟ ಒಲವು ದೊರೆಯುವುದು ಸಹ ಕಷ್ಟ.

26.7 ನಿಮ್ಮ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ

1. ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಎಂದರೇನು?
2. ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯ ಘಟಕಗಳು ಯಾವುವು?
3. ಯಾವ ವಿಧಾನಗಳ ಮೂಲಕ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯ ವ್ಯತ್ಯಯಗಳನ್ನು ಹೋಗಲಾಡಿಸಬಹುದು.

26.8 ಲೀಸ್ಟ್‌ಸ್ಕೇರ್ ವಿಧಾನದಿಂದ ಸರಳರೇಖೆಯ ರಚನೆ ವಿಧಾನ

ನಾವು ಇದುವರೆಗೆ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯ ವ್ಯತ್ಯಯಗಳನ್ನು ಹೋಗಲಾಡಿಸಲು, ನಕ್ಷಾ ವಿಧಾನ ಮತ್ತು ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ನೋಡಿದೆವು. ಇವುಗಳಿಗಿಂತ ಭಿನ್ನವಾದ ಗಣಿತೀಯ ಮಾರ್ಗವೆಂದರೆ ಕೊಡಲಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಗೆ ಸರಳರೇಖೆ ಅಥವಾ ಯುಕ್ತವಾದ ವಕ್ರ ರೇಖೆಯನ್ನು ರಚಿಸುವುದು. ಇಲ್ಲಿ ಸರಳರೇಖೆ ರಚನೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ಕಲಿಯುತ್ತೇವೆ.

$$y = a x + b$$

ಎನ್ನುವುದು ಸರಳರೇಖೆ ಸಮೀಕರಣ ಎನ್ನುವುದು ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ X ಸ್ವ ತಂತ್ರ ಚಲ ಮತ್ತು y ಅವಲಂಬಿ ಚಲ. ಈ ಚಲಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ತಿಳಿದಿರುವಾಗ, ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಳಸಿ ನಾವು ಅವ್ಯಕ್ತ ಚಲಗಳಾದ aಮತ್ತು b ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನಮಗೆ ಎರಡು ಪರಸ್ಪರ ಸ್ವತಂತ್ರವಾದ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಅಗತ್ಯ. ಈ ಉದ್ದೇಶಕ್ಕೆ ಬಳಸುವ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳೆಂದರೆ,

$$\sum Y = na + b\sum x \text{..........}(1)$$

$$\sum xy = a\sum x + b\sum x^2 \text{..........}(2)$$

ಇವೆರಡನ್ನೂ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳೆಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ರಚಿಸಿ, ಅದರ ಮೂಲಕ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಸರಾಸರಿಯಿಂದ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ವ್ಯತಯಯ ವರ್ಗದ ಮೊತ್ತವನ್ನು, ಅವಕಲನ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಕನಿಷ್ಠಗೊಳಿಸಲಾಗುವುದರಿಂದ ಇದನ್ನು 'ಲೀಸ್ಟ್ ಸ್ಕ್ವೇರ್'ವಿಧಾನ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಕೆಳಗಿನ ಮಾಹಿತಿ ಸಕ್ಕರೆ ಕಾರ್ಖಾನೆಯ ಉತ್ಪಾದನೆಯನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ. ಕೊಡಲಾಗಿರುವ ಶ್ರೇಣಿಗೆ 'ಲೀಸ್ಟ್‌ಸ್ಕ್ವೇರ್'ವಿಧಾನದಿಂದ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ರಚಿಸೋಣ ಮತ್ತು ವರ್ಷ 2005ಕ್ಕೆ ಸಕ್ಕರೆಯ ಉತ್ಪಾದನೆಯನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡೋಣ.

ವರ್ಷ	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
ಸಕ್ಕರೆಯ ಉತ್ಪಾದನೆ (000 ಕ್ವಿಂಟಾಲ್‌ಗಳಲ್ಲಿ)	80	90	92	83	94	99	92

ವರ್ಷ X	ಉತ್ಪಾದನೆ Y	X	X^2	XY	Y ನ ಪ್ರವೃತ್ತಿ
1997	80	-3	9	-240	84
1998	90	-2	4	-180	86
1999	92	-1	1	-92	88
2000	83	0	0	0	90
2001	94	+1	1	94	92
2002	99	+2	4	198	94
2003	92	+3	9	276	96
N = 7	$\sum Y = 630$	$\sum X = 0$	$\sum X^2 = 28$	XY = 56	

Xನ ಮಧ್ಯದ ವರ್ಷವನ್ನು '0' ಯಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸೋಣ

ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$\Sigma Y = Na + b\Sigma x....(1)$$

$$\Sigma XY = a\Sigma x + b\Sigma x^2...(2)$$

ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಹಾಕಿದರೆ

$$630 = 7a + 0$$

$$7a = 630$$

$$a = \frac{630}{7} = 90$$

ಸಮೀಕರಣ (2)ರಲ್ಲಿ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಹಾಕಿದರೆ

$$56 = 0 + 28b$$

$$28b = 56$$

$$b = \frac{56}{28} = 2$$

$$a = 90, \quad b = 2$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಸರಳರೇಖೆ ಸಮೀಕರಣ $Y = a + bx$ ನ ಬೆಲೆ $Y = 90 + 2x$

ಇಲ್ಲಿ x ಗೆ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಹಾಕಿದರೆ Y ನ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

$X = -3$ ಆದಾಗ $Y = 90 + 2(-3) = 84$

$X = -2$ ಆದಾಗ $Y = 90 + 2(-2) = 86$

$X = -1$ ಆದಾಗ $Y = 90 + 2(-1) = 88$

ಹಾಗೆಯೇ $X = 0, 1, 2, 3$ ಆದಾಗ Y ನ ಬೆಲೆ 90, 92, 94, 96 ಆಗುತ್ತದೆ. ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು yನ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಬೆಲೆಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಸಕ್ಕರೆ ಉತ್ಪಾದನೆ ಈ ವರಸೆಯಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿಯುತ್ತದೆ ಎಂದು ಅರ್ಥ.

ಈಗ ಈ ಬೆಲೆಗಳೇ ಮುಂದುವರೆದರೆ, ವರ್ಷ2004 ಕ್ಕೆ ಸಂಖ್ಯೆ +4 ಆಗುತ್ತದೆ. ಆಗ ಸಕ್ಕರೆ ಉತ್ಪಾದನೆ,

$Y = 90+2(4) = 98$ ಕ್ವಿಂಟಾಲ್ ಆಗುತ್ತದೆ.

ವರ್ಷ2005 ಕ್ಕೆ ಉತ್ಪಾದನೆ, $Y = 90+2(5)$

$Y = 90+10=100$ ಕ್ವಿಂಟಾಲ್ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಹೀಗೆ ಲೀಸ್ಟ್‌ಸ್ಕೇರ್ ವಿಧಾನದಿಂದ ಚಲದ ಮುಂದಿನ ವರ್ಷಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡುವುದು ಸಾಧ್ಯ

ಉದಾಹರಣೆಗೆ

ವರ್ಷ	ಮಾರಾಟ 000ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು	X	X^2	XY
2000	10	1	1	10
2001	13	2	4	26
2002	15	3	9	45
2003	20	4	16	80
N = 4	48	10	30	161

ಸರಳರೇಖೆ ಬಿಂಬಕ $Y = a+bx$

$$\Sigma y = na + b\Sigma x$$

$$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2$$

$48 = 4a + 10b$........................(1)

$161 = 10a + 30b$.................(2)

$4a + 10b = 48$........ X 3

$12a + 30b = 144$.......(3)

$10a + 30b = 161$......(4)

ಸಮೀಕರಣ (4)ನ್ನು (3)ರಿಂದ ಕಳೆದಾಗ $2a \;+\; 0 \;= -17$

$a = -17/2 = -8.5$

ಸಮೀಕರಣ (1)ರಲ್ಲಿ a ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹಾಕಿದಾಗ

$4(-8.5)+10b = 48$

$10b = 48 + 34.0$

$10b = 82$

$b = 8.2$

ಸಮೀಕರಣ $Y = a + bx$ ಗೆ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಹಾಕಿದಾಗ

$$Y = -8.5 + 8.2X$$

2005 ನೇ ವರ್ಷಕ್ಕೆಉತ್ಪಾದನೆಯನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡಬೇಕಾದರೆ $X = 5$ ಹಾಕಬೇಕು ಆಗ

$$Y = -8.5 + 8.2 \times 5$$

$Y = -8.5 + 41.0$

$Y = 32.5$ ಇದು 2005 ರ ಉತ್ಪಾದನೆ

ಸಾರಾಂಶಿಸೋಣ

ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನಾವು ಸಮಯಶ್ರೇಣಿ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ, ಸಮಯಶ್ರೇಣಿಯ ಘಟಕಗಳು, ಸಮಯಶ್ರೇಣಿಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಹೋಗಲಾಡಿಸುವ ಕ್ರಮಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ. ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಮುಕ್ತರೇಖೆ ವಿಧಾನ, ಸಮ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ, ಚಲಿಸುವ ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ, ಮತ್ತು 'ಲೀಸ್ಟ್‌ಸ್ಕ್ವೇರ್'ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಕಲಿತುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಮೊದಲನೆಯದು ನಕ್ಷಾ ವಿಧಾನವಾದರೆ, 2.3ನೆಯದು ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನಗಳಾಗಿವೆ. ಮೂರನೆಯದು, ಗಣಿತೀಯ ವಿಧಾನವಾಗಿದೆ.

26.10 ಮುಖ್ಯ ಪರಿಭಾವನೆಗಳು

1. ಸಮಯ ಶ್ರೇಣಿಯ ವ್ಯತ್ಯಯ

2.ಋತುಮಾನ ಬದಲಾವಣೆಯಿಂದ ಸಮಯಶ್ರೇಣಿಯ ಮೇಲೆ ಪ್ರಭಾವ

3.ಆವರ್ತ ಕಾರಣಗಳು

4.ಅನಿಶ್ಚಿತ ಕಾರಣಗಳು

5.ಮುಕ್ತರೇಖೆ ವಿಧಾನ

6.ಸಮ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ

7.ಚಲಿಸುವ ಸರಾಸರಿ

8.ಲೀಸ್ಟ್ ಸ್ಕೇರ್ ವಿಧಾನ

26.11 ಸ್ವ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

1.ಸಮಯಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿನ ವ್ಯತ್ಯಯಗಳನ್ನು ಹೋಗಲಾಡಿಸಲು ಚಲಿಸುವ ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನವನ್ನು ವಿವರಿಸಿ.

2.ಕೆಳಗಿನ ನ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ರಚಿಸಿ ವರ್ಷ 2006ಕ್ಕೆ ಹಾಲಿನ ಉತ್ಪಾದನೆಯನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡಿ

ವರ್ಷ:	1998	1999	2000	2001	2002	2003
ಹಾಲಿನ ಉತ್ಪಾದನೆ (000ಲೀಟರ್‌ಗಳಲ್ಲಿ)	45	80	120	130	140	150

26.8 ಮುಂದಿನ ಓದಿಗಾಗಿ

D.N. Elhance : Fundamentals of Statistics, ಅಧ್ಯಾಯ 14

ಬ್ಲಾಕ್ - 7

ಯೂನಿಟ್ -27

ಸೂಚ್ಯಂಕಗಳು

27.1 ಪೀಠಿಕೆ

27.2 ಬೆಲೆ ಸೂಚ್ಯಂಕದ ರಚನೆ

27.3 ಮಾರ್ಷಲ್, ಎಡ್ಜ್‌ವರ್ತ್ ಮತ್ತು ಫಿಷರ್ ರವರ ಸೂಚ್ಯಂಕ ಸೂತ್ರಗಳು

27.4 ಬೆಲೆ ಸೂಚ್ಯಂಕ ರಚನೆಯ ವಿಧಾನ

27.5 ನಿಮ್ಮ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ

27.6 ತೂಕ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಾಪೇಕ್ಷ ಬೆಲೆ ಸೂಚ್ಯಂಕ

27.7 ಸೂಚ್ಯಂಕದ ದೃಡತೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳು

27.8 ಸಾರಾಂಶಿಸೋಣ

27.9 ಮುಖ್ಯ ಪರಿಭಾವನೆಗಳು

27.10 ಸ್ವ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

27.11 ಮುಂದಿನ ಓದಿಗಾಗಿ

ಯೂನಿಟ್ -27
ಸೂಚ್ಯಂಕಗಳು

27.12 ಪೀಠಿಕೆ:

ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನೀವು ಸೂಚ್ಯಂಕದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ, ಬೆಲೆ ಸೂಚ್ಯಂಕದ ರಚನೆ ಅದಕ್ಕಿರುವ ತ್ತೊಂದರೆಗಳು, ಅವುಗಳನ್ನು ಬಗೆಹರಿಸುವ ಬಗೆಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುತ್ತೀರಿ. ಜೊತೆಗೆ ನಾಲ್ಕು ಮುಖ್ಯ ಸೂಚ್ಯಂಕ ಸೂತ್ರಗಳಾದ, ಲ್ಯಾಸ್ ಪೇಯರ್, ಪಾಷೆ, ಫಿಷರ್ ಮತ್ತು ಮಾರ್ಷಲ್ ಎಡ್ಜ್‌ವರ್ತ್‌ರವರ ಸೂಚ್ಯಂಕ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೀಳರಿ ಹಾಗೂ ಇವುಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡುವ ಬಗೆಗಳನ್ನು ಸಹ ಕಲಿತುಕತೊಳ್ಳುತ್ತೀರಿ.

27.2 ಸೂಚ್ಯಂಕದ ಸೂತ್ರ:

ಬೆಲೆ ಸೂಚ್ಯಂಕವನ್ನು ನಾವು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಬಹುದು. "ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ (ಇದನ್ನು ಆಧಾರ ವರ್ಷ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.) ಕೆಲವು ಆಯ್ದ ಸರಕುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆಧಾರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು, ಆ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಇನ್ನೊಂದು ಅಗತ್ಯ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ (ಪ್ರಚಲಿತ ವರ್ಷ) ಹಾಗೆ ಅದೇ ಸರಕುಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಎಷ್ಟು ವ್ಯತ್ಯಾಸಗೊಂಡಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡುವ ಸಾಧನವನ್ನು ಬೆಲೆ ಸೂಚ್ಯಾಂಕ " ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಸೂಚ್ಯಂಕ ಒಂದು ಅಂಕ ಅಷ್ಟೆ. ಎರಡು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಮಯಗಳಲ್ಲಿ ಆರ್ಥಿಕ ಚಲಗಳಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ನ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಅದು ಶೇಕಡಾಂಶವಾಗಿ ಅದು ವ್ಯಕ್ತ ಪಡಿಸುತ್ತದೆ. ಸೂಚ್ಯಂಕ ಬೆಲೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಬಹುದು, ಉದ್ಯೋಗ, ರಫ್ತು ಇತ್ಯಾದಿಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 2000ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಅಕ್ಕಿಯ ಬೆಲೆ ಕೆ.ಜಿ.ಗೆ ರೂ 16 ಇತ್ತು ಮತ್ತು ಅದು ಪ್ರಸ್ತುತ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ರೂ 24ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಈಗ ಬೆಲೆ ಸೂಚ್ಯಂಕವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲಾಗುತ್ತದೆ.

$$\frac{P_1}{P_0} X\ 100$$

ಇಲ್ಲಿ P_1= ಪ್ರಸ್ತುತ ವರ್ಷದ ಬೆಲೆ

P_0= 2000ನೇ ವರ್ಷದ (ಆಧಾರವರ್ಷದ) ಬೆಲೆ ಆದ್ದರಿಂದ ಸೂಚ್ಯಂಕ =

$$=\frac{24}{16} X\ 100$$
$$=\frac{240}{16}=150$$

ಅಂದರೆ ಅಕ್ಕಿಯ ಬೆಲೆ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ ಎಂದರ್ಥ. ಈಗ ಅನೇಕ ಸರಕುಗಳಿರುವಾಗ, ಎರಡು ನಿಗದಿತ ವರ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಬೆಲೆ ಸೂಚ್ಯಂಕವನ್ನು ಹೇಗೆ ರಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ.

27.3 ಬೆಲೆ ಸೂಚ್ಯಂಕದ ರಚನೆ

ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಬೆಲೆ ಸೂಚ್ಯಂಕ ನಮ್ಮ ರೂಪಾಯಿಯ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಬೆಲೆಗಳು ಹೆಚ್ಚಾದರೆ ರೂಪಾಯಿ ಮೌಲ್ಯ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಬೆಲೆಗಳು ಕಡಿಮೆಯಾದರೆ ರೂಪಾಯಿ ಮೌಲ್ಯ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಸೂಚ್ಯಂಕ ಇದನ್ನು ತೋರಿಸಬೇಕು. ಆದರೆ ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವಹಾಗೆ ಸೂಚ್ಯಂಕದ ರಚನೆ ತುಂಬಾ ಕಷ್ಟ. ಏಕೆಂದರೆ ಮಾರುಕಟ್ಟೆಯಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ಸರಕುಗಳು ಮಾರಾಟವಾಗುತ್ತವೆ

ಅವುಗಳಿಗೆ ಅನೇಕ ಬೆಲೆಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಕ್ರೂಢೀಕರಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ? ಯಾವ ಸರಕುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು? ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕು ?ಇವೆಲ್ಲ ದೊಡ್ಡ ಸಮಸ್ಯೆ. ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಈಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಹುಮಟ್ಟಿಗೆ ಪರಿಹರಿಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ. ಮೊದಲು ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ ನೋಡೋಣ.

(1) **ಸರಕುಗಳ ಆಯ್ಕೆ:** ಮೊದಲನೆಯ ದೊಡ್ಡ ತಲೆ ನೋವು, ಯಾವ ಸರಕುಗಳನ್ನು ಸೂಚ್ಯಂಕಕ್ಕಾಗಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಬೇಕು ಎನ್ನುವುದು. ಇದಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರ ಎಲ್ಲ ಅಂತಸ್ತಿನ ಜನರಿಗೆ ಬೇಕಾಗುವ ಸರಕುಗಳನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಸೂಚ್ಯಂಕ ರಚನೆಯಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಸರಕುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ತುಂಬಾ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಸರಕುಗಳ ಆಯ್ಕೆ ಯಾವ ಉದ್ದೇಶಕ್ಕಾಗಿ ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದೇವೆ ಎನ್ನುವುದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಜೀವನ ಮಟ್ಟ ಸೂಚ್ಯಂಕಕ್ಕೆ ಕೆಲವು, ಮತ್ತು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಬೆಲೆ ಮಟ್ಟಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚಿನ ಸರಕುಗಳನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತದೆ.

(2) **ಮೂಲ ವರ್ಷ ಅಥವಾ ಆಧಾರ ವರ್ಷದ ಆಯ್ಕೆ:** ಸೂಚ್ಯಾಂಕದ ರಚನೆಗೆ ಯಾವುದಾದರೂ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ವರ್ಷವನ್ನು ಆಧಾರವಾಗಿ ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ವರ್ಷದ ಆಯ್ಕೆ ಒಂದು ಸಮಸ್ಯೆಯೇ. ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ವರ್ಷವನ್ನು ಆಧಾರವರ್ಷವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಆದರೆ ಯಾವ ಏರು ಪೇರುಗಳೂ ಇಲ್ಲದ ಸಾಮಾನ್ಯ ವರ್ಷ ಯಾವುದು ? ಎನ್ನುವುದರ ತೀರ್ಮಾನ ಕಷ್ಟ. ಏಕೆಂದರೆ ಯಾವ ವರ್ಷವನ್ನು ತೆಗೆದು ಕೊಂಡರೂ, ಅಲ್ಲಿ ಹಣದುಬ್ಬರ, ಹಿಂಜರಿತ, ಕ್ಷಾಮ, ಯುದ್ಧ, ಒಂದಲ್ಲ ಒಂದು ರೀತಿಯ ಕಾರಣದಿಂದ ಆರ್ಥಿಕ ಏರು ಪೇರುಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮಾರ್ಷಲ್ ರವರು, ಒಂದು 'ಕೊಂಡಿ' ಆಧಾರ ವರ್ಷ ಕ್ರಮವನ್ನು (Chain base method) ಸೂಚಿಸುತ್ತಾರೆ. ಅದೆಂದರೆ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಷವನ್ನೇ ಆಧಾರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಮುಂದುವರಿಯುವುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 2004ಕ್ಕೆ 2003ನ್ನು ಆಧಾರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳುವುದು ಇತ್ಯಾದಿ. ಇದರಿಂದ ಸ್ಥಿರ ಆಧಾರವರ್ಷ (fixed base year) ದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಗೆ ಹರಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

(3) **ಪದಾರ್ಥಗಳ ಬೆಲೆಗಳು:** ಬೆಲೆ ಸೂಚ್ಯಂಕವನ್ನು ರಚಿಸುವಾಗ ಸರಕುಗಳಿಗೆ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆಯ್ದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು? ಎನ್ನುವುದು ಸಹ ಒಂದು ಸಮಸ್ಯೆ. ಯಾವ ಸರಕನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ ಅಂಗಡಿಯಿಂದ ಅಂಗಡಿಗೆ, ಸ್ಥಳದಿಂದ ಸ್ಥಳಕ್ಕೆ ಬೆಲೆಗಳು ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗುತ್ತವೆ. ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಗೆಹರಿಸಿಕೊಂಡಿರುವ ರೀತಿ, ಕೇವಲ ಸಗಟು ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದು. ಬೆಲೆಗಳು ಅಷ್ಟು ವ್ಯತ್ಯಾಸಗೊಳ್ಳುವುದಿಲ್ಲ.

(4) **ತೂಕ ಕೊಡುವ ಸಮಸ್ಯೆ:** ಎಲ್ಲ ಸರಕುಗಳು ಒಂದೇ ಮಹತ್ವ ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ ಎನ್ನುವುದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು. ಆದ್ದರಿಂದ ಬೇರೆ-ಬೇರೆ ಸರಕುಗಳಿಗೆ ಬೇರೆ - ಬೇರೆ ಪ್ರಾಧಾನ್ಯತೆಯನ್ನು ಕೊಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಅನೇಕ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ವೈಯಕ್ತಿಕ ನಿರ್ಣಯಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ತೂಕಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗುತ್ತದೆ. (SubjectiveWeightage) ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಗಣಿತದ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿ ತೂಕ ಕೊಡಲಾಗುತ್ತದೆ. ಬೆಲೆ ಸೂಚ್ಯಂಕಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ, ಸರಕುಗಳ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನೇ ತೂಕವಾಗಿ ಸಹ ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಎರಡು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಉದಾಹರಣೆ 1ರಲ್ಲಿ ತೂಕವಿಲ್ಲದೆ ಸೂಚ್ಯಂಕವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆ 2ರಲ್ಲಿ ತೂಕ ಕೊಟ್ಟು ಬೆಲೆ ಸೂಚ್ಯಂಕವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ತೂಕ ಕೊಡುವುದರ ಬಗ್ಗೆ ಜಿಜ್ಞಾಸೆ ಮುಂದುವರೆದಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ-1

ಕ್ರ.ಸಂ.	ಸರಕುಗಳು	ಪ್ರಮಾಣ	ಆಧಾರವರ್ಷ(po) (ಬೆಲೆ ರೂ. ಗಳಲ್ಲಿ)	ಬೆಲೆ(p)	ಸೂಚ್ಯಂಕ
1	ಅಕ್ಕಿ	1ಕ್ವಿಂಟಾಲ್	200	300	150
2	ಗೋಧಿ	1ಕ್ವಿಂಟಾಲ್	200	300	150
3	ರಾಗಿ	1/2 ಕ್ವಿಂಟಾಲ್	100	150	150
4	ಬಟ್ಟೆ	10 ಮೀಟರ್	100	200	200
5	ಸೋಪು	2 ಬಾರ್	18	36	200

$$\frac{P_1}{P_0} X\ 100$$

$$= \frac{300}{200} X100 = 150$$

$$= \frac{150}{100} X\ 100 = 150$$

ಇತ್ಯಾದಿ

ಬೆಲೆ ಸೂಚ್ಯಂಕ $= \frac{850}{5} = 170$

ಉದಾಹರಣೆ-2

ತೂಕ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸೂಚ್ಯಂಕ ಪಟ್ಟಿ

ಸರಕುಗಳು	ಶೇಕಡ ಬೆಲೆ ವ್ಯತ್ಯಾಸ	ತೂಕ	ತೂಕದ ಬೆಲೆ ವ್ಯತ್ಯಾಸ
ಅಕ್ಕಿ	125	3	375
ಗೋಧಿ	200	2	400
ರಾಗಿ	250	1	250
ಬಟ್ಟೆ	200	1	200
ಸೋಪು	200	1	200
		8	1425

ತೂಕದ ಬೆಲೆ ಸೂಚ್ಯಂಕ $= \frac{1425}{8} = 178$

ಸರಾಸರಿಯ ಸಮಸ್ಯೆ: ಬೆಲೆ ಸೂಚ್ಯಂಕವನ್ನು ರಚಿಸುವಾಗ, ಯಾವ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಬಳಸಬೇಕು ಎನ್ನುವ ಸಮಸ್ಯೆಯೂ ಬರುತ್ತದೆ. ಸೂಚ್ಯಂಕ ರಚನೆಗಾಗಿ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಸರಾಸರಿ ಅತ್ಯುತ್ತಮ ವಾದುದೆಂದು ಭಾವಿಸಲಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಸೂಚ್ಯಂಕ ರಚನೆ ಸೂತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಅಳವಡಿಸಲಾಗಿದೆ.

27.4 ಸೂಚ್ಯಂಕ ರಚನೆ ಸೂತ್ರಗಳು

ಸೂಚ್ಯಂಕ ರಚನೆಗೆ ಅನೇಕ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಬಳಸಲಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ನಾಲ್ಕು ಮುಖ್ಯ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅವುಗಳೆಂದರೆ

(1)ಲ್ಯಾಸ್ ಪೇಯರ್ಸ್ ಸೂತ್ರ

ಸೂಚ್ಯಂಕ $= \frac{\Sigma P_1 q_o}{\Sigma P_0 q_{o=}} X\ 100$

(2) ಪಾಷೆ ಸೂಚ್ಯಂಕ $= \frac{\Sigma P_1 q_1}{\Sigma P_0 q_o} X\ 100$

(3) ಫಿಷರ್ ರವರ ಆದರ್ಶ ಸೂಚ್ಯಂಕ $= \sqrt{\frac{\Sigma P_1 q_o}{\Sigma P_0 q_o} X \frac{\Sigma P_1 q_1}{\Sigma P_0 q_1}} X\ 100$

(4) ಮಾರ್ಷಲ್ ಎಡ್ಜ್‌ವರ್ತ್ ಸೂಚ್ಯಂಕ $= \frac{\Sigma P_1 q_o + \Sigma P_1 q_1}{\Sigma P_0 q_o + \Sigma P_1 q_1} X\ 100$

ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರಗಳಲ್ಲಿ

Po = ಆಧಾರವರ್ಷದ ಬೆಲೆ

P_1= ಪ್ರಸ್ತುತ ವರ್ಷದ ಬೆಲೆ

qo = ಆಧಾರವರ್ಷದ ಪ್ರಮಾಣ

q_1 = ಪ್ರಸ್ತುತ ವರ್ಷದ ಪ್ರಮಾಣ

ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

5 ಸರಕುಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಆಧಾರವರ್ಷ ಮತ್ತು ಪ್ರಸ್ತುತವರ್ಷದ ಬೆಲೆ ಮತ್ತು ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ಮಾಹಿತಿಗೆ ಲ್ಯಾಸ್‌ಪೇಯರ್ ಸೂಚ್ಯಂಕ, ಪಾಷೆಯವರ ಸೂಚ್ಯಂಕ, ಫಿಷರ್‌ರವರ ಸೂಚ್ಯಂಕ ಮತ್ತು ಮಾರ್ಷಲ್-ಎಡ್ಜ್‌ವರ್ತ್ ಸೂಚ್ಯಂಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ.

	ಆಧಾರವರ್ಷ		ಪ್ರಸ್ತುತ ವರ್ಷ					
ಸರಕುಗಳು	ಬೆಲೆ (ರೂನಲ್ಲಿ) Po	ಪ್ರಮಾಣ qo	ಬೆಲೆ (ಘಟಕಗಳಲ್ಲಿ) P_1	ಪ್ರಮಾಣ (ರೂನಲ್ಲಿ) q_1	(ಘಟಕಗಳಲ್ಲಿ) P_1q_o	Poqo	P_1q_1	P_oq_1
A	6	50	10	50	500	300	560	335
B	2	100	2	120	200	200	240	240
C	4	60	6	60	360	240	360	240
D	10	30	12	24	360	300	288	240
E	8	40	12	36	480	320	432	288

$\Sigma p_1 q_0 = 1900$ $\Sigma p_0 q_0 = 1360$ $\Sigma p_1 q_1 = 1880$ $\Sigma p_0 q_1 = 1343$

(1) ಫಿಷರ್ ಸೂಚ್ಯಂಕ =

$$= \sqrt{\frac{\Sigma P_1 q_o}{\Sigma P_0 q_o} X \frac{\Sigma P_1 q_1}{\Sigma P_0 q_1}} X\ 100$$

$$= \sqrt{\frac{1900}{1300} X \frac{1880}{1343}} X\ 100$$

$$\sqrt{1.4\ X\ 1.4}\ X\ 100$$

$$= 14\ .X\ 100$$

$$= 140$$

(2) ಲ್ಯಾಸ್ ಪೇಯರ್ಸ್ ಸೂಚ್ಯಂಕ =

$$\frac{\Sigma P_1 q_o}{\Sigma P_0 q_o} X\ 100$$

$$\frac{1900}{1360} X100 = 139.7$$

(3) ಪಾಷೆಯವರ ಸೂಚ್ಯಂಕ =

$$\frac{\Sigma P_1 q_1}{\Sigma P_0 q_1} X\ 100$$

$$= \frac{1880}{1343} X100 = 139.985$$

(4) ಮಾರ್ಷಲ್ ಎಡ್ಜ್‌ವರ್ತ್ ಸೂಚ್ಯಂಕ =

$$\frac{\Sigma P_1 (q_0 + q_1)}{\Sigma P_0 (q_0 + q_1)} X\ 100$$

$$= \frac{\Sigma P_1 q_o + \Sigma P_1 q_1}{\Sigma P_0 q_o + \Sigma P_1 q_1} X\ 100$$

$$= \frac{1900 + 1880}{1360 + 1343} X\ 100$$

$$\frac{3780}{2703} X\ 100 = 139\ .84$$

ಎಲ್ಲ ಸೂಚ್ಯಂಕ ಉತ್ತರಗಳೂ ಹೆಚ್ಚು ಕಡಿಮೆ ಒಂದೇ ಆಗಿರುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಬೇಕು.

27.6 ನಿಮ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ

1. ಸೂಚ್ಯಂಕದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ನೀಡಿ

2. ಬೆಲೆ ಸೂಚ್ಯಂಕ ರಚನೆಯಲ್ಲಿರುವ ತೊಂದರೆಗಳೇನು/ ಅವುಗಳನ್ನು ಬಗೆ ಹರಿಸುವ ವಿಧಾನಗಳಾವುವು?

3. ಕೆಳಗಿನ ಮಾಹಿತಿಗೆ ಫಿಷರ್‌ನ ಆದರ್ಶ ಸೂಚ್ಯಂಕವನ್ನು ರಚಿಸಿ.

	ಆಧಾರವರ್ಷ		ಪ್ರಸ್ತುತ ವರ್ಷ	
ಸರಕು	ಬೆಲೆ (ರೂ. ನಲ್ಲಿ)	ಪ್ರಮಾಣ (ಘಟಕಗಳಲ್ಲಿ)	ಬೆಲೆ (ರೂ. ನಲ್ಲಿ)	ಪ್ರಮಾಣ (ಘಟಕಗಳಲ್ಲಿ)
A	15	100	30	100
B	20	50	25	25
C	40	50	30	25
D	60	10	30	5
E	5	20	5	10

27.7 ಜೀವನ ವೆಚ್ಚ ಸೂಚ್ಯಂಕ;

ಜೀವನ ವೆಚ್ಚ ಸೂಚ್ಯಂಕ ವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರದಿಂದ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಜೀವನ ವೆಚ್ಚ ಸೂಚ್ಯಂಕ $= \dfrac{\sum P_1 q_o}{\sum P_0 q_o} X\ 100$

ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ

	ಆಧಾರವರ್ಷ		ಪ್ರಸ್ತುತ ವರ್ಷ			
ಸರಕು	ಬೆಲೆ (ರೂ. ನಲ್ಲಿ) P0	ಪ್ರಮಾಣ (ಘಟಕಗಳಲ್ಲಿ) q_0	ಬೆಲೆ (ರೂ. ನಲ್ಲಿ) P_1	ಪ್ರಮಾಣ (ಘಟಕಗಳಲ್ಲಿ) q_1	P_1q_0	P_0q_0
A	16	50	15	50	750	800
B	12	100	14	120	1400	1200
C	14	60	18	80	1080	840
D	10	30	18	50	540	300
E	18	40	20	50	800	720
				4570	3860	

ಜೀವನ ವೆಚ್ಚ ಸೂಚ್ಯಂಕ =

$$\frac{\Sigma P_1 q_o}{\Sigma P_0 q_o} X\ 100$$

$$\frac{4570}{3860} X 100$$

$$= 118.39$$

27.9 ಸೂಚ್ಯಂಕದ ದೃಢತೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳು

ಒಂದು ಸೂಚ್ಯಂಕವನ್ನು ಉತ್ತಮವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕಾದರೆ ಅದು ಮೂರು ಪರೀಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ತೃಪ್ತಿಪಡಿಸಬೇಕು. ಅವುಗಳೆಂದರೆ

(i) ಟೈಂ ರಿವರ್ಸಲ್ ಪರೀಕ್ಷೆ

(ii) ಫ್ಯಾಕ್ಟರ್ ರಿವರ್ಸಲ್ ಪರೀಕ್ಷೆ

(iii) ಸರ್ಕ್ಯುಲಾರ್ ಪರೀಕ್ಷೆ

(i) ಟೈಂ ರಿವರ್ಸಲ್ ಪರೀಕ್ಷೆ

$$P_{01}\ XP_{10} = 1$$

$$= \frac{\Sigma\ P_1 q_o}{\Sigma\ P_0 q_o}\ X\ \frac{\Sigma\ P_1 q_1}{\Sigma\ P_0 q_1} = 1$$

(ii) ಫ್ಯಾಕ್ಟರ್ ರಿವರ್ಸಲ್ ಪರೀಕ್ಷೆ

$$p_{10} XQ_{01} = \frac{\Sigma P_1 q_1}{\Sigma P_0 q_o}$$

(iii) ಸರ್ಕ್ಯುಲಾರ್ ಪರೀಕ್ಷೆ

$$= \frac{\Sigma\ P_1 q}{\Sigma\ P_0 q}\ X\ \frac{\Sigma\ P_2 q}{\Sigma\ P_1 q}\ X\ \frac{\Sigma\ P_0 q}{\Sigma\ P_2} = 1$$

ಕೇವಲ ಫಿಷರ್‌ರವರ ಆದರ್ಶ ಸೂಚ್ಯಂಕ ಈ ಮೂರು ಪರೀಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ತೃಪ್ತಿಪಡಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದಲೇ ಇದನ್ನು "ಆದರ್ಶ ಸೂಚ್ಯಂಕ " ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಫಿಷರ್ ಸೂಚ್ಯಂಕವನ್ನು ಒಂದು ದೃಢ ಸೂಚ್ಯಂಕ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

27.10 ಸಾರಾಂಶಿಸೋಣ

ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನೀವು ಸೂಚ್ಯಂಕ ಎಂದರೇನು?ಬೆಲೆ ಸೂಚ್ಯಂಕವನ್ನು ರಚಿಸುವುದರಲ್ಲಿರುವ ತೊಂದರೆಗಳೇನು? ಅದಕ್ಕೆ ಪರಹಾರಗಳೇನು? ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿದ್ದೀರಿ. ಹಾಗೆಯೇ ಫಿಷರ್, ಮಾರ್ಷಲ್ ಎಡ್ಜ್‌ವರ್ತ್, ಲ್ಯಾಸ್ ಪೇಯರ್ ಮತ್ತು ಪಾಷೆ ಸೂಚ್ಯಂಕ ರಚನಾ ವಿಧಾನವನ್ನು ನೋಡಿದ್ದೀರಿ. ಜೊತೆಗೆ ಸೂಚ್ಯಂಕ ರಚನೆಯ ದೃಢತೆ ಇರುವ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ್ದೀರಿ. ಮುಂದಿನ ಘಟಕದಲ್ಲಿ ಸೂಚ್ಯಂಕಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚಿನ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೀರಿ.

27.11 ಮುಖ್ಯ ಪರಿಭಾವನೆಗಳು

1. ಸೂಚ್ಯಂಕ
2. ಬೆಲೆ ಸೂಚ್ಯಂಕ
3. ಜೀವನ ವೆಚ್ಚ ಸೂಚ್ಯಂಕ
4. ಸೂಚ್ಯಂಕದ ಸೂತ್ರಗಳು

(i) ಲ್ಯಾಸ್ ಪೇಯರ್ ಸೂತ್ರ $P_{01} = \frac{\Sigma P_1 q_o}{\Sigma P_0 q_o} X\, 100$

(ii) ಪಾಷೆ ಸೂತ್ರ: $P_{01} = \frac{\Sigma P_1 q_1}{\Sigma P_0 q_o} X\, 100$

(iii) ಫಿಷರ್ ಆದರ್ಶ ಸೂತ್ರ $= \sqrt{\frac{\Sigma P_1 q_o}{\Sigma P_0 q_o} X \frac{\Sigma P_1 q_1}{\Sigma P_0 q_1}} X\, 100$

(iv) ಮಾರ್ಷಲ್ - ಎಡ್ಜ್‌ವರ್ತ್ ಸೂತ್ರ: $P_{01} = \frac{\Sigma P_1 q_o + \Sigma P_1 q_0}{\Sigma P_0 q_o + \Sigma P_0 q_0} X\, 100$

27.12 ಸ್ವ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

1. ಫಿಷರ್ ಸೂಚ್ಯಂಕ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಏಕೆ ಆದರ್ಶ ಸೂಚ್ಯಂಕವೆಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ವಿವರಿಸಿ.

2.ಕೆಳಗಿನ ಮಾಹಿತಿಗೆ ಲ್ಯಾಸ್ ಪೇಯರ್, ಪಾಷೆ, ಫಿಷರ್ ಮತ್ತು ಮಾರ್ಷಲ್ ಎಡ್ಜ್‌ವರ್ತ್ ಸೂಚ್ಯಂಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ.

	ಆಧಾರವರ್ಷ		ಪ್ರಸ್ತುತ ವರ್ಷ	
ಸರಕುಗಳು	ಬೆಲೆ	ಪ್ರಮಾಣ	ಬೆಲೆ	ಪ್ರಮಾಣ
A	5	10	10	15
B	10	20	12	25
C	12	40	10	45
D	15	60	10	65
E	20	70	15	75

27.13 ಮುಂದಿನ ಓದಿಗಾಗಿ

D.N. Elhance : Fundamentals of Statistics,

ಘಟಕ -28

ಸೂಚ್ಯಂಕಗಳು-2

28.1 ಪೀಠಿಕೆ

28.2 ಆಧಾರವರ್ಷವನ್ನು ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸುವುದು

28.3 ಎರಡು ಸೂಚ್ಯಂಕಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವುದು.

28.4 ಅನುಭೋಗಿ ಬೆಲೆ ಸೂಚ್ಯಂಕ

28.5 ಕುಟುಂಬ ಬಜೆಟ್ ವಿಧಾನದಿಂದ ಸೂಚ್ಯಂಕ

28.6 ಸೂಚ್ಯಂಕದ ಉಪಯೋಗಗಳು

28.7 ಸಾರಾಂಶಿಸೋಣ

28.8 ಮುಖ್ಯ ಪರಿಬಾವನೆಗಳು

28.9 ಸ್ವ ಅಭ್ಯಾಸಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

28.10 ಮುಂದಿನ ಓದಿಗಾಗಿ

ಘಟಕ -28

ಸೂಚ್ಯಂಕಗಳು-2

28.1 ಪೀಠಿಕೆ:

ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನಾವು ಸೂಚ್ಯಂಕದ ಕಲಿಕೆಯನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆಧಾರವರ್ಷವನ್ನು ಬದಲಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ? ಎರಡು ಸೂಚ್ಯಂಕಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟುಗೂಡಿಸುವುದು ಹೇಗೆ? ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಕಲಿಯುತ್ತೇವೆ. ಜೊತೆಗೆ ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚ ಮಾರ್ಗದ ಮೂಲಕ ಸೂಚ್ಯಂಕವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದು ಮತ್ತು ಕುಟುಂಬ ಬಜೆಟ್ ವಿಧಾನದ ಮೂಲಕ ಸೂಚ್ಯಂಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ನಾವು ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ಕಲಿಯುತ್ತೇವೆ.

28.2 ಆಧಾರವನ್ನು ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸುವುದು:

ಸೂಚ್ಯಂಕ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳಲ್ಲಿ ಪದೇ-ಪದೇ ನಾವು ಒಂದು ಆಧಾರವರ್ಷವನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಮತ್ತೊಂದು ಆಧಾರವರ್ಷಕ್ಕೆ ಪರಿವರ್ತನೆ ಮಾಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಎರಡು ಕಾರಣಕ್ಕಾಗಿ ಮಾಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

1. ಹಳೆಯ ಆಧಾರವರ್ಷ ತುಂಬಾ ಹಳೆಯದಾಗಿ ಬಿಟ್ಟಿರಬಹುದು.

2. ಒಂದು ಸೂಚ್ಯಂಕವನ್ನು, ಬೇರೆ ಆಧಾರವರ್ಷವಿರುವ ಮತ್ತೊಂದು ಸೂಚ್ಯಂಕದೊಡನೆ ಹೋಲಿಸಬೇಕಾಗಿರಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 1990 ಆಧಾರವರ್ಷವಿರುವ ಸೂಚ್ಯಂಕವನ್ನು 1992ಆಧಾರವರ್ಷವಿರುವ ಸೂಚ್ಯಂಕದೊಡನೆ ಹೋಲಿಸಬೇಕಾಗಿರಬಹುದು.

ಆಧಾರವರ್ಷವನ್ನು ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸುವ ಬಗೆಯೆಂದರೆ ಹಳೆಯ ಎಲ್ಲ ಸೂಚ್ಯಂಕಗಳನ್ನು ಹೊಸ ಆಧಾರವರ್ಷದ ಸೂಚ್ಯಂಕದಿಂದ ಭಾಗಿಸುವುದು ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ವರ್ಷ	ಸೂಚ್ಯಂಕ
1994	100
1995	110
1996	120
1997	200
1998	400
1999	410
2000	400
2001	380
2002	370
2003	340

ಈಗ 1994ರ ಆಧಾರವರ್ಷದಿಂದ 2002ನೇ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಆಧಾರವರ್ಷವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಅದನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಮಾಡಲಾಗುತ್ತದೆ.

ವರ್ಷ	ಸೂಚ್ಯಂಕ 1994=100	ಸೂಚ್ಯಂಕ	2000=100
1994	100	$\frac{100}{400} X\ 100$	= 25
1995	110	$\frac{110}{400} X\ 100$	= 27.5
1996	120	$\frac{120}{400} X\ 100$	= 30.0
1997	200	$\frac{200}{400} X\ 100$	= 50.0
1998	400	$\frac{400}{400} X\ 100$	= 100.0
1999	410	$\frac{410}{400} X\ 100$	= 102.5
2000	400	$\frac{400}{400} X\ 100$	= 100.0
2001	380	$\frac{380}{400} X\ 100$	= 95.00
2002	370	$\frac{370}{400} X\ 100$	= 92.50
2003	340	$\frac{430}{400} X\ 100$	= 85.00

28.3 ಎರಡು ಸೂಚ್ಯಂಕಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವುದು.

ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚಿನ ಸೂಚ್ಯಂಕಗಳನ್ನು ಒಂದು ಗೂಡಿಸಬೇಕಾದ ಪ್ರಮೇಯಗಳು ಸಹ ಬರುತ್ತವೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಸ್ಪ್ಲೈಸಿಂಗ್ (Splising)ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಹೋಲಿಕೆಯಲ್ಲಿ ತಾದಾತ್ಮ್ಯತೆ ಇರುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಸೂಚ್ಯಾಂಕಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಬೇರೆ-ಬೇರೆ ಕಾರಣಗಳಿಗಾಗಿ ಬೇರೆ-ಬೇರೆ ಆಧಾರವರ್ಷಗಳನ್ನಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಪಡೆದಿರುವ ಸೂಚ್ಯಂಕಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಉದಾಹರಣೆ: 1994ನ್ನು ಆಧಾರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು 1998ವರೆಗೆ Aಎಂಬ ಸೂಚ್ಯಂಕವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಯಿತು. ನಂತರ 2001ರ ವರೆಗೆ Bಸೂಚ್ಯಂಕವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಯಿತು ಇವೆರಡು ಸೂಚ್ಯಂಕಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸೋಣ.

ವರ್ಷ	Aಸೂಚ್ಯಂಕ	Bಸೂಚ್ಯಂಕ
1994	100	
1995	110	
1996	112	
1997	138	
1998	150	1998 = 100
		1999 = 120
		2000 = 140
		2001 = 130

ವರ್ಷ	A ಸೂಚ್ಯಂಕ	Bಸೂಚ್ಯಂಕ	ಸೂಚ್ಯಂಕBಯನ್ನು Aಯೋಡನೆ ಜೋಡಿಸುವ ಸೂಚ್ಯಂಕ
1994	100		
1995	110		
1996	112		
1997	138		
1998	150	100	$\frac{150}{100} X\ 100 = 150$
1999		120	$\frac{150}{100} X\ 120 = 180$
2000		140	$\frac{150}{100} X\ 140 = 210$
2001		130	$\frac{150}{100} X\ 130 = 195$

28.4 ಅನುಭೋಗಿ ಬೆಲೆ ಸೂಚ್ಯಂಕ:

ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಬೋಗಿಗಳು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಸರಕುಗಳಿಗೆ ರಚಿಸಲಾಗುವ ಸೂಚ್ಯಂಕಕ್ಕೆ ಅನುಭೋಗಿ ಸೂಚ್ಯಂಕ(Consumer Price Index)ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಇದು (i) ಆಹಾರ (ii) ಬಟ್ಟೆ(iii)ವಿದ್ಯುತ್‌ಶಕ್ತಿ (iv) ಮನೆ ಬಾಡಿಗೆ ಮತ್ತು (v) ಇತರ ವೆಚ್ಚಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಅನುಭೋಗಿ ಸೂಚ್ಯಂಕವನ್ನು ಒಟ್ಟು ವೆಚ್ಚ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರದಿಂದ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

$$\text{ಅನುಭೋಗಿ ಸೂಚ್ಯಂಕ} = \frac{\Sigma P_1 q_o}{\Sigma P_0 q_o} X\ 100$$

ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಇದು ಲ್ಯಾಸ್‌ಪೇಯರ್ ಸೂಚ್ಯಂಕ ಸೂತ್ರ. ಇದನ್ನು ಹಿಂದಿನ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನಾವು ಗಮನಿಸಿದ್ದೇವೆ.

28.5 ಕುಟುಂಬ ಬಜೆಟ್ ವಿಧಾನದಿಂದ ಸೂಚ್ಯಂಕ(Family Budjet method)

ಈ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಬಹಳ ಕುಟುಂಬಗಳು ವಿವಿಧ ಅವಶ್ಯಕ ಅನುಭೋಗಿ ಸರಕುಗಳ ಮೇಲೆ ಎಷ್ಟು ವೆಚ್ಚ ಮಾಡುತ್ತಾರೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಒಂದು ಕುಟುಂಬ ಸರಾಸರಿ ಎಷ್ಟು ಖರ್ಚು ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಎಂಬುದನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿ ಸೂಚ್ಯಂಕವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ 'ತೂಕಗಳಿಗೆ'(weights)ಸಹ ಗಮನ ಕೊಡಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಕುಟುಂಬ ಬಜೆಟ್ ಸೂಚ್ಯಂಕದ ಸೂತ್ರವೆಂದರೆ $\frac{\Sigma PW}{\Sigma W}$

ಇಲ್ಲಿ Pಯನ್ನು $\frac{P_1}{P_0} X\ 100$ ಮೂಲಕ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ΣPW= Pಮತ್ತು Wಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಮೊತ್ತ.

ΣW = ತೂಕಗಳ ಮೊತ್ತ.

ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಒಂದು ಮಧ್ಯಮ ವರ್ಗದ ಕುಟುಂಬದ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಎರಡು ಅವಧಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ಮಾಹಿತಿಗೆ ಕುಟುಂಬ ಬಜೆಟ್ ಸೂಚ್ಯಂಕ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ.

	ಆಹಾರ	ಬಾಡಿಗೆ	ಬಟ್ಟೆ	ವಿದ್ಯುತ್ಶಕ್ತಿ	ಇತರೆ
ವೆಚ್ಚದ ಶೇಕಡಾಂಶ	35	15	20	10	20
1995ರ ಬೆಲೆ (ರೂ ನಲ್ಲಿ)	1500	500	1000	200	600
2003ರ ಬೆಲೆ (ರೂ ನಲ್ಲಿ)	1740	600	1250	250	900

ವೆಚ್ಚದ ಬಾಬ್ತುಗಳು	P0	P1	$\frac{P_1}{P_0} X 100 = P$	W	Pw
ಆಹಾರ	1500	1740	116	35	4060
ಬಾಡಿಗೆ	500	600	120	15	1800
ಬಟ್ಟೆ	1000	1250	125	20	2500
ವಿದ್ಯುಚ್ಛಕ್ತಿ	200	250	125	10	1250
ಇತರೆ	600	900	150	20	30000
				ΣW=100	ΣPW=12610

ಕುಟುಂಬ ಬಜೆಟ್ ಸೂಚ್ಯಂಕ $= \frac{\Sigma PW}{\Sigma W} = \frac{12,610}{100} = 126.1$

ಕುಟುಂಬ ಬಜೆಟ್ ಸೂಚ್ಯಂಕವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರದಿಂದ ಸಹ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಕುಟುಂಬ ಬಜೆಟ್ ಸೂಚ್ಯಂಕ $= \frac{\Sigma IV}{V}$

ಇಲ್ಲಿ $I =$ ಸೂಚ್ಯಂಕ

$V =$ ವೆಚ್ಚ

$\Sigma I.V =$ ಸೂಚ್ಯಂಕ ಮತ್ತು ವೆಚ್ಚದ ಗುಣಲಬ್ದಗಳ ಮೊತ್ತ

ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಖರ್ಚುಬಾಬ್ತು	ವೆಚ್ಚ	2003ರ ಸೂಚ್ಯಂಕ
1.ಆಹಾರ	46%	550
2.ಬಟ್ಟೆ	10%	215
3.ವಿದ್ಯುಚ್ಛಕ್ತಿ	7%	220
4.ಮನೆ ಬಾಡಿಗೆ12%	150	
5.ಇತರೆ ಖರ್ಚು	25%	275

ಖರ್ಚುಬಾಬ್ತು	ಸೂಚ್ಯಂಕ(I)	ವೆಚ್ಚ(V)	I.V
ಆಹಾರ	550	46	25300
ಬಟ್ಟೆ	215	10	2150
ವಿದ್ಯುಚ್ಛಕ್ತಿ	220	7	1540
ಮನೆ ಬಾಡಿಗೆ	150	12	1800
ಇತರೆ	75	25	6875
		$\Sigma V = 100$	$\Sigma IV = 37665$

ಅನುಭೋಗಿ ಸೂಚ್ಯಂಕ $= \dfrac{\Sigma IV}{\Sigma W} = \dfrac{37665}{100} = 376.65$

28.6 ಸೂಚ್ಯಂಕದ ಉಪಯೋಗಗಳು

ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ವಾಣಿಜ್ಯ ಶಾಸ್ತ್ರಕ್ಕೆ ಸೂಚ್ಯಂಕಗಳು ಅನಿವಾರ್ಯ ಸಾಧನ. ಇದರ ಉಪಯೋಗಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿದರೆ ಇದರ ಅರಿವು ಆಗುತ್ತದೆ.. ಕೆಲವು ಮುಖ್ಯ ಉಪಯೋಗಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ

(1) ಯುಕ್ತ ಆರ್ಥಿಕ ನೀತಿಯನ್ನು ರೂಪಿಸಲು ಸೂಚ್ಯಂಕಗಳು ನೆರವಾಗುತ್ತವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಸರ್ಕಾರ ತನ್ನ ಉದ್ಯೋಗಿಗಳಿಗೆ ತುಟ್ಟಿಭತ್ಯೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧಾರ ಮಾಡಲು ಬೆಲೆ ಸೂಚ್ಯಂಕಗಳನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸುತ್ತದೆ. ತುಟ್ಟಿ ಭತ್ಯೆಯನ್ನು ಕಾಲಕಾಲಕ್ಕೆ ಹಣದುಬ್ಬರಕ್ಕೆ ತಕ್ಕಂತೆ ನಿರ್ಧರಿಸದಿದ್ದರೆ, ಉದ್ಯೋಗಿಗಳು, ಕಾರ್ಮಿಕರು, ಮುಷ್ಕರಗಳನ್ನು ಹೂಡುತ್ತಾರೆ.

(2) ಸಾಮಾಜಿಕ ವಿಜ್ಞಾನಗಳಲ್ಲಿ ಸೂಚ್ಯಂಕದ ಉಪಯೋಗಗಳು ಬಹಳ ಇದೆ. ಮನಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು, ಇದರ ನೆರವಿನಿಂದ ಬುದ್ಧಿವಂತಿಕೆ ಗುಣಾಂಕ (intelligence quotient)ವನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡುತ್ತಾರೆ. ಸಮಾಜಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು, ಜನ ಸಂಖ್ಯೆ ಸೂಚ್ಯಂಕಗಳನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸುತ್ತಾರೆ. ಅಭಿವೃದ್ಧಿಯನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡುವ ಪ್ರಯತ್ನದಲ್ಲಿ , ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಮಾನವ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಸೂಚ್ಯಂಕ, ಲಿಂಗ ಆಧಾರಿತ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಸೂಚ್ಯಂಕ(Gender based development index)ಮುಂತಾದುವುಗಳನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿ, ಅಭಿವೃದ್ಧಿಯನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಲು ಯತ್ನಿಸುತ್ತಾರೆ. ಹೀಗೆ ಯಾವುದೇ ಸಾಮಾಜಿಕ ಆರ್ಥಿಕ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಸೂಚ್ಯಂಕ ಸಹಾಯಕ ಒಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅವಧಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಂತೆ, ಮತ್ತೊಂದು ಅವಧಿಗೆ ಒಂದು ಚಟುವಟಿಕೆಯ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಲು ಸೂಚ್ಯಂಕವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

(3) ಸೂಚ್ಯಂಕ ಒಂದು ಚಲದ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯನ್ನು ತುಂಬಾ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಅಳತೆ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಬೆಲೆಗಳು ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತಿವೆಯೇ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತಿವೆಯೇ, ಜೀವನ ಮಟ್ಟ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತಿದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಬಹಳ ಸುಲಭವಾಗಿ ಸೂಚ್ಯಂಕಗಳಿಂದ ಅಳತೆ ಮಾಡಬಹುದು. ಈ ರೀತಿ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ಪ್ರವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಸೂಚ್ಯಂಕಗಳು ಬಹಳ ಸಹಾಯಕ.

(4)ಒಂದೇ ಸಮನೆಬೆಲೆಗಳು ಹೆಚ್ಚಾದಾಗ ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ರೂಪಾಯಿಯ ಮೌಲ್ಯ ಕುಗ್ಗುತ್ತದೆ. ಜೀವನ ಮಟ್ಟಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವೇತನ ಭತ್ಯಗಳನ್ನು ಕೊಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಬೆಲೆ ಮಟ್ಟಗಳಿಗೆ ತಕ್ಕ ಹಾಗೆ ಇವುಗಳನ್ನು ಸರಿಹೊಂದಿಸಲು ಸೂಚ್ಯಂಕ ನೆರವಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ನಾಮಾಂಕಿತ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು (nominal price) ಸರಿದೂಗಿಸಲು ಸೂಚ್ಯಂಕ ಅತ್ಯಂತ ಆವಶ್ಯಕವಾಗುತ್ತದೆ.

28.7 ಸಾರಾಂಶಿಸೋಣ

ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನಾವು ಸರಾಸರಿ ವೆಚ್ಚಕ್ರಮದಿಂದ ಸೂಚ್ಯಂಕದ ರಚನೆ, ಕುಟುಂಬ ವೆಚ್ಚ ಕ್ರಮದಿಂದ ಸೂಚ್ಯಂಕ ರಚನೆಯನ್ನು ಕಲಿತಿದ್ದೇವೆ. ಜೊತೆಗೆ, ಹೀಗೆ ನಾವು ಎರಡು ಬೇರೆ- ಬೇರೆ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಸೂಚ್ಯಂಕಗಳ ಜೋಡಣೆ ಮಾಡುವುದು ಹೇಗೆ ? ಹಾಗೆಯೇ ಬೇರೆ-ಬೇರೆ ವರ್ಷಗಳನ್ನು ಆಧಾರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ರಚಿಸಲಾಗಿರುವ ಸೂಚ್ಯಂಕಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಆಧಾರವರ್ಷಕ್ಕೆ ಜೋಡಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ. ಸೂಚ್ಯಂಕದ ಉಪಯೋಗಗಳನ್ನು ಸಹ ನಾವು ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಸಾರಾಂಶದಲ್ಲಿ ಸೂಚ್ಯಂಕಗಳು ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದ ಅವಿಭ್ಯಾಜ್ಯ ಅಂಗ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಮನನ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಅವಶ್ಯಕ

28.8 ಮುಖ್ಯ ಪರಿಭಾವನೆಗಳು

1. ಆಧಾರವರ್ಷದ ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸುವಿಕೆ(Shifting of Index number)
2. ಎರಡು ಸೂಚ್ಯಂಕಗಳನ್ನು ಕ್ರೋಢಿಕರಿಸುವುದು.(Splicing of index number)
3. ಅನುಭೋಗಿ ಬೆಲೆ ಸೂಚ್ಯಂಕ(Consumer price index)
4. ಸರಾಸರಿವೆಚ್ಚ ಕ್ರಮದ ಸೂಚ್ಯಂಕ (Average expanditure method for computing Index numbers)
5. ಕುಟುಂಬ ಬಜೆಟ್ ವಿಧಾನದಿಂದ ಸೂಚ್ಯಂಕ(Family budget based index number)

28.9 ಸ್ವ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

1. ಅನುಭೋಗಿ ಬೆಲೆ ಸೂಚ್ಯಂಕರಚನೆಯನ್ನು ವಿವರಿಸಿ.
2. ಕೆಳಗಿನ ನ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಅನುಭೋಗಿ ಬೆಲೆ ಸೂಚ್ಯಂಕವನ್ನು ರಚಿಸಿ.

ವಸ್ತುಗಳು	ಸೂಚ್ಯಂಕ	ತೂಕ
ಆಹಾಕ	300	5
ವಿದ್ಯುಚ್ಛಕ್ತಿ	250	1
ಬಟ್ಟೆ	280	1
ಮನೆಬಾಡಿಗೆ	200	2
ಇತರೆ	150	1

28.10 ಮುಂದಿನ ಓದಿಗಾಗಿ

D.N. Elhance : Fundamentals of Statistics, ಅಧ್ಯಾಯ 13

ಘಟಕ -29

ಸಂಭಾವನೀಯತೆಯ ಸಿದ್ಧಾಂತ

29.1 ಪೀಠಿಕೆ

29.2 ಆವರ್ತವ್ಯಾಖ್ಯೆ ಅಥವಾ ಸಂಭಾವನೀಯತೆಯ ಎಂಪೆರಿಕಲ್ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

29.3 ಘಟನೆಗಳು

29.4 ವಿವಿಧ ರೀತಿಯ ಘಟನೆಗಳು

29.5 ಸಂಭಾವನೀಯತೆ ನಿಯಮಗಳು

29.6 ಬೇಸ್ ನಿಯಮ

29.7 ಸಾರಾಂಶಿಸೋಣ

29.8 ಮುಖ್ಯ ಪರಿಭಾಷನೆಗಳು

29.9 ಸ್ವ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

29.10 ಮುಂದಿನ ಓದಿಗಾಗಿ.

ಘಟಕ -29

ಸಂಭಾವನೀಯತೆಯ ಸಿದ್ಧಾಂತ

29.1 ಪೀಠಿಕೆ:

ಈ ಹಿಂದೆಯೇ ನಾವು ಸೂಚಿಸಿರುವಂತೆ ಆರ್ಥಿಕ ಕ್ರಿಯೆಗಳ ಅತ್ಯಂತ ಮುಖ್ಯವಾದ ಲಕ್ಷಣವೆಂದರೆ ಬದಲಾವಣೆ. ಯಾವುದೇ ಆರ್ಥಿಕ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸಿದರೂ ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಬೆಲೆ, ಹಣದ ಸರಬರಾಜು, ಲಾಭ, ನಾವು ಕಾಣುವ ಮುಖ್ಯ ಅಂಶವೆಂದರೆ ಇವು ಸತತವಾಗಿ ಬದಲಾವಣೆಗಳನ್ನು ಅನುಭವಿಸುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತವೆ. ಹೀಗಾಗಿ ಇವುಗಳು ಮುಂದೆ ಹೇಗೆ ವರ್ತಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ಹೇಳುವುದಂತೂ ತುಂಬಾ ಕಷ್ಟ. ಹೀಗಾಗಿ ನಾವು ಆರ್ಥಿಕ ಚಲಗಳ ಮುಂಚಲನೆಯನ್ನು ಊಹಿಸಲು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಿಂದ ಸಂಭವನೀಯತೆ ತತ್ವಗಳನ್ನು ಎರವಲು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಸಂಭವನೀಯತೆ(Probabilism) ತತ್ವಗಳನ್ನು ತುಂಬಾ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಪಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅದೇ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ಒಂದು ಮುಖ್ಯ ಭಾಗವಾಗಿ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಗೊಂಡಿದೆ. ಮುಂದಿನ ಆರ್ಥಿಕ ಚಲನೆಯನ್ನು ತುಂಬಾ ಖಚಿತವಾಗಿ ಅಂದಾಜು ಮಾಡಲಾಗದಿದ್ದರೂ, ಈ ಚಲ ಇಷ್ಟು ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪಡೆದು ಕೊಳ್ಳುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಶೇ 70, ಶೇ80, ಇತ್ಯಾದಿಗಳಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದು. ಉಳಿದ ಶೇ 30, ಶೇ 20ಅನ್ನು ಅನಿಶ್ಚಿತತೆ ಬಿಡಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಕ್ರಿ.ಶ. 2020ಕ್ಕೆ ಭಾರತದ ಜನ ಸಂಖ್ಯೆ 1.5 ಬಿಲಿಯನ್ ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದರ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ ಶೇ 90 ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಆರ್ಥಿಕತೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಮುಂದುವರಿದರೆ ಈ ಸಂಖ್ಯೆ ನಿಜವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಯುದ್ಧ, ಭೂಕಂಪ, ಪ್ರವಾಹ ಮುಂತಾದವುಗಳು ಆದರೆ ಜನ ಸಂಖ್ಯೆ ಈ ಮಟ್ಟವನ್ನು ಮುಟ್ಟದಿರಬಹುದು. ಈ ರೀತಿಯ ಅನಿಶ್ಚಿತತೆಗೆ ಅವಕಾಶ ಇದ್ದೇ ಇರುತ್ತದೆ. ಅನಿಶ್ಚಿತತೆ ಇರುವುದಾದರೆ ಅಂದಾಜು ಮಾಡಬೇಕಾದರೂ ಏಕೆ ಎನ್ನುವ ಪ್ರಶ್ನೆ ಏಳಬಹುದು. ಇದಕ್ಕೆ ಉತ್ತರ ಸುಲಭ. ಹೆಚ್ಚಿನಂಶ, ನಾವು ಮಾಡುವ ಅಂದಾಜುಗಳು ನಿಜವಾಗುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದಲೇ ಈ ಶಾಸ್ತ್ರಕ್ಕೆ ಇಷ್ಟು ಪ್ರಾಧಾನ್ಯತೆ ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನಾವು ಸಂಭಾವನೀಯತೆ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಪ್ರಾರಂಭಿಕ ತತ್ವಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

29.2 ಸಂಭಾವನೀಯತೆ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

ಒಂದು ಘಟನೆ m ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನಡೆಯಬಹುದಾದರೆ ಮತ್ತು nರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನಡಯದಿದ್ದರೆ, ಹಾಗೂ ನಡೆಯುವುದಕ್ಕೆ ಮತ್ತು ನಡೆಯದೇ ಇರುವುದಕ್ಕೆ ಸಮಾನ ಅವಕಾಶಗಳಿದ್ದರೆ, ಈ ಘಟನೆ ನಡೆಯುವ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ(Probability)ಯನ್ನು

$\frac{m}{m+n}$ ಎಂದು ಮತ್ತು ನಡೆಯದೇ ಹೋಗುವ ಸಂಭಾವನೀಯತೆಯನ್ನು $\frac{n}{m+n}$ ಎಂದು ಸೂತ್ರೀಕರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿಸಿದಾಗ ಅದು ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ (Head)ಬೀಳುವ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ 1/2 ಮತ್ತು ಕೆಳಮುಖವಾಗಿ ಬೀಳುವ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ 1/2ಎಂದಾದರೆ.

ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ಬೀಳುವ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ $\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$

ಹಾಗೆಯೇ ಕೆಳಮುಖವಾಗಿ ಬೀಳುವ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ ಸಹ 1/2 ಆದ್ದರಿಂದ ಒಟ್ಟು ಸಂಭಾವನೀಯತೆ = 1/2+1/2 = 1
ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕ್ಲಾಸಿಕಲ್ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಆವರ್ತ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ಅಥವಾ ಎಂಪಿರಿಕಲ್ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

ಒಟ್ಟು ಘಟನೆಯಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಫಲಿತಾಂಶ, ಎಷ್ಟುಬಾರಿ ಅನುಕೂಲಕರವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದರ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಸಂಬವನೀಯತೆ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಬಹುದು. ಗಣೀತೀಯವಾಗಿ,

ಒಂದು ಘಟನೆಯನ್ನು 'n' ಬಾರಿ ನಡೆಸಿದಾಗ, ಅದರಲ್ಲಿ 'a' ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಅನುಕೂಲಕರವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಅದರ ಸಂಭವನೀಯತೆ(a/n)ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಈ (a/n) ಅನುಪಾತ n ಎನ್ನುವುದು ∞ ಕಡೆಗೆ ಚಲಿಸುವಾಗ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಮಿತಿಯನ್ನು ತಲುಪುತ್ತದೆ. ಈ ಮಿತಿಯನ್ನು ಆಘಟನೆಯ ಸಂಭಾನೀಯತೆ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಗಣಿತೀಯವಾಗಿ

$$P(E)=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n}$$

ಅನಂತ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಪರೀಕ್ಷೆಯನ್ನು ಮಾಡುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವಾದುದರಿಂದ, ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಅತ್ಯಂತ ಹೆಚ್ಚು ಪರೀಕ್ಷೆಗೆ ಒಂದು ಘಟನೆಯನ್ನು ಒಳಪಡಿಸಿದಾಗ (a/n) ಏನಾಗುತ್ತದೆ. ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅದನ್ನು ಆ ಘಟನೆಯ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು 50,000ಬಾರಿ ಚಿಮ್ಮಿಸಿದಾಗ, 25,000ಬಾರಿಗೆ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರ ನಾಣ್ಯವು ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ಬೀಳಬಹುದು. ಆಗ ಈ ಘಟನೆಯ ಸಂಬಾವನೀಯತೆ 25000/50000 = 1/2 ಆಗುತ್ತದೆ.

ಒಟ್ಟು ಸಂಭಾವನೀಯತೆ = 1/2+1/2= 1

29.3 ಘಟನೆಗಳು (Events)

ಸಂಭಾವನೀಯತೆ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯ ಅತಿ ಮುಖ್ಯ ಪರಿಭಾವನೆಯೆಂದರೆ ಘಟನೆಗಳು, ಸಂಭಾವನೀಯತೆ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಕ್ಕೆ ಒಳಪಡಿಸುವ ಯಾವುದೇ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಘಟನೆ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿಸುವುದು, ಆರು ಮುಖವುಳ್ಳ ಒಂದು ಡೈಸ್(dice)ಅನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿಸಿ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಗಮನಿಸುವುದು, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಂದ ಒಬ್ಬನನ್ನು ಆಯ್ಕೆಮಾಡಿ ಅವನು ಎಡಚನೇ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸುವುದು ಇತ್ಯಾದಿ.

29.4 ವಿವಿಧ ರೀತಿಯ ಘಟನೆಗಳು

ಸಂಭಾವನೀಯತೆ ಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಘಟನೆಗಳನ್ನು ವಿವಿಧ ಬಗೆಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಒಂದು ಘಟನೆ ಇನ್ನೊಂದನ್ನು ಸಾಧ್ಯವಾಗಿಸದ ಘಟನೆ:(Mutually exchange events)

ಎರಡು ಘಟನೆಗಳು ಒಟ್ಟಿಗೆ ನಡೆಯದೇ ಇರುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಇರುವಾಗ ಅವುಗಳನ್ನು ಒಂದು ಇನ್ನೊಂದು ಘಟನೆಯನ್ನು ಸಾಧ್ಯವಾಗಿಸದ ಘಟನೆ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿಸಿದಾಗ ಅದು ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ಬಿದ್ದರೆ ಆಗಲೇ ಅದು ಕೆಳಮುಖವಾಗಿ ಬೀಳುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಇಲ್ಲದಿರುವುದರಿಂದ, ಇವೆರಡೂ ಘಟನೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ಘಟನೆ ಇನ್ನೊಂದು ಘಟನೆಯನ್ನು ಸಾಧ್ಯವಾಗಿಸದ ಘಟನೆಗಯೆಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಮುಗಿದು ಹೋಗುವ ಘಟನೆಗಳು:(Exhaistive events)

ಯಾವುದಾದರೂ ಘಟನೆ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಕೊಡುವ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಮುಗಿದು ಹೋದರೆ ಆ ಘಟನೆಯನ್ನು ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಮುಗಿದು ಹೋಗುವ ಘಟನೆ ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಆರು ಮುಖಗಳಿರುವ ಒಂದು ಡೈಸ್‌ಅನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿಸಿ, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಡೆದು ಕೊಂಡರೆ, ಈ ಪ್ರಯೋಗ ಸಂಪೂರ್ಣಗೊಂಡು ಬಿಡುತ್ತದೆ. ಆಗ ಇನ್ನು ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ನಾವು ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಇಂತಹ ಘಟನೆಯನ್ನು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಮುಗಿದು ಹೋಗುವ ಘಟನೆಯೆಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ.

ವೈರುಧ್ಯ ಘಟನೆಗಳು:(Complimentary evevnts) ಒಂದು ಘಟನೆ ನಡೆಯುವುದನ್ನು A ಎಂದು ಕರೆದರೆ. ಅದು ನಡೆಯದೇ ಹೋಗುವುದನ್ನು $\overline{A}$ ಯನ್ನು Aಯ ಎಂದು ಕರೆದರೆ $\overline{A}$ ವೈರುಧ್ಯಘಟನೆ ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ. Aಮತ್ತು $\overline{A}$ ಎನ್ನುವುದು ಒಂದು ನಡೆದಾಗ ಮತ್ತೊಂದು ನಡೆಯದ ಮತ್ತು ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಮುಗಿದು ಹೋಗುವ ಘಟನೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಒಂದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನಡೆಯುವ ಘಟನೆಗಳು(equally likely events)

ದೀರ್ಘಾವಧಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಘಟನೆ ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ನಡೆಯುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಒಂದೇ ರೀತಿ ನಡೆಯುವ ಘಟನೆಯೆಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಬಹಳಬಾರಿ ಚಿಮ್ಮಿಸಿದರೆ ದೀರ್ಘಾವಧಿಯಲ್ಲಿ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿಯೇ ಬೀಳುತ್ತದೆ.

ಪರಸ್ಪರ ಸ್ವತಂತ್ರ ಘಟನೆಗಳು:(Independent events)

ಒಂದು ಘಟನೆ ನಡೆಯುವ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ ಮತ್ತೊಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭಾವನೀಯತೆಯ ಮೇಲೆ ಯಾವ ಪ್ರಭಾವವನ್ನೂ ಬೀರದಿದ್ದರೆ, ಅಂತಹ ಘಟನೆಯನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಸ್ವತಂತ್ರ ಘಟನೆಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿಸುವುದು. ಒಂದು ನಾಣ್ಯ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ಬರುವ ಫಲಿತಾಂಶ, ಎರಡನೇ ನಾಣ್ಯ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ಬರುವ ಫಲಿತಾಂಶಕ್ಕಿಂತ ಸ್ವತಂತ್ರವಾದುದು. ಆದುದರಿಂದ ಇವೆರಡೂ ಘಟನೆಗಳೂ ಪರಸ್ಪರ ಸ್ವತಂತ್ರವಾದವು.

ಅವಲಂಬಿ ಘಟನೆಗಳು:(Dependent event)

ಒಂದು ಘಟನೆ ನಡೆಯುವುದು ಇನ್ನೊಂದು ಘಟನೆಯನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿದರೆ ಆಗ ಎರಡು ಘಟನೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಅವಲಂಬಿ ಘಟನೆಗಳೆಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ. Aಮತ್ತು B ಎರಡು ಕ್ರಿಯೆಗಳೆಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ A ಈಗಾಗಲೇ ನಡೆದಿರುವ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ , Bನಡೆಯುವುದಾದರೆ Aಮತ್ತು Bಯನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಅವಲಂಬಿ ಕ್ರಿಯೆಗಳೆಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಚಿಹ್ನೆಯ ಮೂಲಕ ಇದನ್ನು P(A/B)ಎಂದು ಬರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. B ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ನಿಗದಿ ಮಾಡಿರುವಾಗ Aಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಇದು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತದೆ.

ಒಟ್ಟು 'n' ಕ್ರಿಯೆಗಳಲ್ಲಿ m_1ಸಾರಿ Aಮತ್ತು Bಕ್ರಿಯೆಗಳೆರಡೂ ನಡೆಯುತ್ತವೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಹಾಗೆಯೇ m_2- ಬಾರಿ Aಕ್ರಿಯೆ B ಕ್ರಿಯೆಯೊಡನೆ ಅಥವಾ ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿ ಜರಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ

$$P(B/A) = \frac{M_1}{M_1 + M_2} = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad \text{ಹಾಗೆಯೇ}$$

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

29.5 ಸಂಭಾವನೀಯತೆ ನಿಯಮಗಳು

ಸಂಭಾವನೀಯತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲು ಅನೇಕ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ಎರಡು ನಿಯಮಗಳನ್ನು ನೋಡುತ್ತೇವೆ. ಅವುಗಳೆಂದರೆ, ಸಂಕಲನ ನಿಯಮ(Adddition law)ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರ ನಿಯಮ(Multiplication Law)

ಸಂಕಲನ ನಿಯಮ: ಎರಡು ಘಟನೆಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದನ್ನು ಸಾಧ್ಯವಾಗಿಸದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವಾಗ (Mutully exclusive events) ಮತ್ತು ಈ ಘಟನೆಗಳು Aಮತ್ತು B ಆಗಿದ್ದರೆ, AಅಥವಾB ನಡೆಯುವ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ, ಅವುಗಳ ವೈಯಕ್ತಿಕ ಸಂಭಾವನೀಯತೆಯ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಗಣಿತೀಯವಾಗಿ

P(AUB) = P(A)+P(B)

(ಮೇಲಿನದನ್ನುAಯೂನಿಯನ್ B ಎಂದು ಓದಬೇಕು. ಅಂದರೆ Aಅಥವಾ Bಯ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ)

A ಮತ್ತು B ಘಟನೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಒಂದನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ಸಾಧ್ಯವಾಗಿಸುವಂತಿದ್ದರೆ, Aಯ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ, ಅಥವಾ Bಯ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ ಕೆಳಗಿನಂತಿರುತ್ತದೆ. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

ಉದಾಹರಣೆ: ಒಂದು ಸಮೀಕ್ಷೆಯಿಂದ ಹೊರಬಿದ್ದಿರುವ ಅಂಶವೆಂದರೆ, ಪಟ್ಟಣವೊಂದರಲ್ಲಿ ಶೇ50ರಷ್ಟು, ಬೆಳಗಿನ ಪತ್ರಿಕೆಯನ್ನು ಓದುತ್ತಾರೆ. ಮತ್ತು ಶೇ 60ರಷ್ಟು ಸಂಜೆ ಪತ್ರಿಕೆಯನ್ನು ಓದುತ್ತಾರೆ. ಶೇ 20ರಷ್ಟು ಬೆಳಗಿನ ಹಾಗೂ ಸಂಜೆಯ ಪತ್ರಿಕೆಯನ್ನು ಓದುತ್ತಾರೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಯಾರಾದರೂ ಒಬ್ಬ ಪತ್ರಿಕೆ ಓದುವವನನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಂಡರೆ ಬೆಳಗಿನ ಹಾಗೂ ಸಂಜೆಯ ಪತ್ರಿಕೆಯನ್ನು ಆತ ಓದುವ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು? ಇದಕ್ಕೆ ಉತ್ತರ ನೋಡೋಣ

$P(A) = 0.50$
$P(B) = 0.60$
$P(A \cup B)$

ಬೆಳಗಿನ ಅಥವಾ ಸಂಜೆಯ ಅಥವಾ ಎರಡನ್ನೂ ಓದುವವರ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= 0.50 + 0.60 - 0.20$$
$$= 0.90$$

ನಿಗದಿತ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ(Conditional probablity)

ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಘಟನೆ ನಡೆಯುವಾಗ ಅದನ್ನು ಪ್ರಭಾವಿಸುತ್ತಿರುವ ಘಟನೆ ನಡೆದು ಹೋಗಿದ್ದರೆ ಅಥವಾ ಅದರ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ, ಬೇಕಾಗಿರುವ ಘಟನೆಯ ಸಂಭಾವನೀಯತೆಯನ್ನು ನಿರ್ಬಂದಿತ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅದನ್ನು P(A/B)ಎಂದು ಬರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರ ಅರ್ಥ Bಯ ಸಂಭಾವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ A ಯ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ ಎಂದು. ಇದರ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಮಾಡಲಾಗುತ್ತದೆ.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}; P(B) \neq 0$$
$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}; P(A) \neq 0$$

ಉದಾಹರಣೆ:ಒಂದು ಅಧ್ಯಯನದ ಪ್ರಕಾರ, ಶೇ65ರಷ್ಟು ಮ್ಯಾನೇಜರ್‌ಗಳಿಗೆ ಸ್ವಲ್ಪ ವಾಣಿಜ್ಯ ಶಿಕ್ಷಣದ ಹಿನ್ನಲೆಯಿದೆ. ಹಾಗೆಯೇ,ಶೇ20ರಷ್ಟು ಮ್ಯಾನೇಜರ್‌ಗಳಿಗೆಸ್ವಲ್ಪ ವಾಣಿಜ್ಯ ಶಿಕ್ಷಣದ ಹಿನ್ನಲೆ ಇದೆ. ಆದರೆ , ಇಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್ ಹಿನ್ನಲೆ ಇಲ್ಲ. ಹಾಗಾದರೆ, ಇಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್ ಶಿಕ್ಷಣವಿದೆ ಎಂದು ಗೊತ್ತಿರುವ ಒಬ್ಬ ಮ್ಯಾನೇಜರ್ ಗೆ ಸ್ವಲ್ಪ ವಾಣಿಜ್ಯ ಶಿಕ್ಷಣದ ಹಿನ್ನಲೆ ಇರುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದರ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ ಏನು?

A- ಮ್ಯಾನೇಜರ್‌ಗೆ ಸ್ವಲ್ಪ ವಾಣಿಜ್ಯದ ಹಿನ್ನಲೆ ಇದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಸೂಚಿಸಲಿ

B- ಅವನಿಗೆ ಸ್ವಲ್ಪ ಇಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್ ಹಿನ್ನಲೆ ಇದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಸೂಚಿಸಲಿ. ಆಗ

$$P(A) = 0.65, \quad P(B) = 0.50$$
$$P(A \cap B) = 0.45$$

ಆದ್ದರಿಂದ $$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.45}{0.50} = 0.90$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಒಬ್ಬ ಮ್ಯಾನೇಜರ್‌ಗೆ ಇಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್ ಶಿಕ್ಷಣವಿದ್ದು ಅವನಿಗೆ ವಾಣಿಜ್ಯದ ಹಿನ್ನಲೆ ಇದೆ ಎನ್ನುವುದರ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ ಶೇ 0.9.

ಗುಣಾಕಾರದ ನಿಯಮ(Multiplication Law)

ಗುಣಾಕಾರ ನಿಯಮವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಹೇಳಬಹುದು.

Aಮತ್ತುB ಎರಡು ಘಟನೆಗಳು ಏಕ ಕಾಲಕ್ಕೆ ಸಂಭವಿಸುವುದರ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ, B ಕೊಡಲಾಗಿರುವ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿನ Aಯ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ, ಮತ್ತು Bಯ ಸಂಭಾವನೀಯತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಗಣಿತೀಯವಾಗಿ

$$P(A \cap B) = P(A / B)\ X\ P(B)$$

ಹಾಗೆಯೇ $P(B \cap A) = P(B / A)\ X\ P(A)$

29.6 ಬೇಸ್ ನಿಯಮ (Bayes' theorem)

ಬೇಸ್ ನಿಯಮ, ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭಾವನೀಯತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವಾಗ, ಆ ಘಟನೆಯನ್ನು ಪ್ರಭಾವಿಸುವುದರ ಬಗ್ಗೆ ಹೊಸ-ಹೊಸ ಮಾಹಿತಿ ದೊರೆಯುತ್ತಾ ಹೋದಂತೆ, ಅದರ ಸಂಭಾವನೀಯತೆಯನ್ನು ಸಹ ಪರಿಷ್ಕರಿಸುತ್ತಾ ಹೋಗಬೇಕು ಎಂದು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ನಿಯಮವನ್ನು ಥಾಮಸ್ ಬೇಸ್ ರೂಪಿಸಿದ್ದರಿಂದ ಅವರ ಹೆಸರಿನಲ್ಲಿ ಇದು ಪ್ರಸಿದ್ಧವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ: ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ವಾರ್ಷಿಕ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ದರ್ಜೆಯಲ್ಲಿ ಉತ್ತೀರ್ಣನಾಗುತ್ತಾನೆ ಎನ್ನುವುದರ ಸಂಭವನೀಯತೆ 1/10 ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಅವನು 10 ಕ್ಲಾಸ್ ಟೆಸ್ಟ್‌ಗಳಲ್ಲಿ 4ರಲ್ಲಿ ಪ್ರಥಮದರ್ಜೆ ಪಡೆದಿದ್ದಾನೆ ಎನ್ನುವುದು ತಿಳಿದಿದೆ ಎಂದು ಬಾವಿಸೋಣ. ಹಾಗಿದ್ದರೆ, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಪ್ರಥಮ ದರ್ಜೆಯಲ್ಲಿ ಪಾಸಾಗುತ್ತಾನೆ ಎನ್ನುವುದರ ಸಂಭಾವನೀಯತೆಎಷ್ಟು?

A- ಎನ್ನುವುದು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಥಮ ದರ್ಜೆ ಪಡೆಯುತ್ತಾನೆ ಎನ್ನುವುದರ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ

ಆಗ P(A) = $\frac{1}{10}$ ಮತ್ತು P(Aಆಗಿಲ್ಲ ಎನ್ನುವುದು) =$\frac{9}{10}$

B - ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಥಮದರ್ಜೆ ಪಡೆಯುವುದರ ಸಂಭಾವನೀಯತೆಗೊತ್ತಿರುವಾಗ ಕ್ಲಾಸ್ ಟೆಸ್ಟ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಥಮ ದರ್ಜೆ ಪಡೆಯುವುದರ ಸಂಭಾವನೀಯತೆಯಾಗಿರಲಿ.

ಆಗ P(B/A) =$\frac{4}{10}$ ಮತ್ತು P(B/Aಆಗಿಲ್ಲದಿರುವಾಗ) $\frac{6}{10}$

P(A) = $\frac{1}{10}$, P(Aಆಗಿಲ್ಲದಿರುವುದು) $\frac{9}{10}$

P(B/A) = $\frac{4}{10}$ P(B/Aಆಗಿಲ್ಲದಿರುವುದು) = $\frac{6}{10}$

ಕ್ಲಾಸ್‌ಟೆಸ್ಟ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಫಲಿತಾಂಶ ಗೊತ್ತಿರುವಾಗ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಥಮದರ್ಜೆ ಪಡೆಯುವುದರ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ

$$P(A/B) = \frac{P(A/B) = P(A)P(B/A)}{P(A)\ P(B/A) + p(\text{Aಅಲ್ಲದಿರುವುದು})\text{P(B/Aಅಲ್ಲದಿರುವುದು)}}$$

$$P(A/B)=\frac{\frac{1}{10}X\frac{4}{10}}{\left(\frac{1}{10}X\frac{4}{10}\right)+\left(\frac{9}{10}X\frac{6}{10}\right)}$$

$$=\frac{\frac{4}{100}}{\frac{58}{100}}=\frac{4}{58}=0.069$$

ವಿಷಯ ಮಾಹಿತಿ ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಪಡೆಯುವುದಕ್ಕೆ ಮುಂಚೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಪ್ರಥಮ ದರ್ಜೆ ಪಡೆಯುತ್ತಾನೆಂಬುದರ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ = 1/10 =0.1

ಆದರೆ ಟೆಸ್ಟ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಥಮದರ್ಜೆ ಪಡೆದಿದ್ದಾನೆ ಎನ್ನುವ ವಿಷಯ ಗೊತ್ತಾದ ನಂತರ, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಪ್ರಥಮದರ್ಜೆ ಪಡೆಯುತ್ತಾನೆಂಬುದರ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ = 0.069ಆದ್ದರಿಂದ ಟೆಸ್ಟ್‌ಗಳ ಫಲಿತಾಂಶದ ಮಾಹಿತಿ ದೊರೆತ ನಂತರ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಪ್ರಥಮದರ್ಜೆ ಪಡೆಯುವ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿ ಹೋಗಿದೆ.

ಮೇಲಿನ ರೀತಿಯ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು ಬೇಸ್ ನಿಯಮದ ಪ್ರಕಾರ ಮಾಡಲಾಗುತ್ತದೆ.

29.7 ಸಾರಾಂಶಿಸೋಣ

ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ಬಹಳ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ ತತ್ವವನ್ನು ನಿಮಗೆ ಪರಿಚಯಿಸುವ ಪ್ರಯತ್ನ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ಹಿಂದೆಯೇ ತಿಳಿಸಿರುವಂತೆ ಸಂಭಾವನೀಯತೆಶಾಸ್ತ್ರ ಇಂದು ಬಹಳ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಹೊಂದಿರುವ ಶಾಸ್ತ್ರ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅದರ ಸಂಪೂರ್ಣ ಅರಿವು ಉಂಟಾಗಬೇಕಾದರೆ ಆಳವಾದ ಅಧ್ಯಯನ ಅಗತ್ಯ ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನಾವು ಸಂಭಾವನೀಯತೆಎಂದರೇನು?ವಿವಿಧ ಘಟನೆಗಳು ಯಾವುವು? ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಿಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಜೊತೆಗೆ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಅರಿತು ಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ ಹಾಗೆಯೇ ತುಂಬಾ ಪ್ರಸಿದ್ಧವಾದ ಬೇಸ್ ನಿಯಮವನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ. ಇವು ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರಕ್ಕೆ ತುಂಬಾ ಸಹಾಯಕವಾದವು ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಹೇಳಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ.

29.8 ಮುಖ್ಯ ಪರಿಬಾವನೆಗಳು

1. ಸಂಭಾವನೀಯತೆ
2. ಕ್ಲಾಸಿಕಲ್ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ
3. ಆವರ್ತಗಳು
4. ಘಟನೆಗಳು
5. ಸಂಕಲನ ನಿಯಮ
6. ಗುಣಾಕಾರ ನಿಯಮ
7. ಬೇಸ್ ನಿಯಮ

29.9 ಸ್ವ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

1. ಸಂಭಾವನೀಯತೆ ಎಂದರೇನು?

2. ಸಂಭಾವನೀಯತೆಯ ಕ್ಲಾಸಿಕಲ್ ನಿಯಮವನ್ನು ವಿವರಿಸಿ.

3. ಸಂಭಾವನೀಯತೆಯ ಸಂಕಲನ ನಿಯಮವನ್ನು ವಿವರಿಸಿ.

4. ಬೇಸ್ ನಿಯಮದ ಮುಖ್ಯ ಲಕ್ಷಣವೇನು?

5. ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿಸಿದಾಗ, ಅದು ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ಬೀಳುವ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

29.10 ಮುಂದಿನ ಓದಿಗಾಗಿ

D.N. Elhance : Fundamentals of Statistics, ಅಧ್ಯಾಯ -17

ಘಟಕ -30

ತಾತ್ವಿಕ ವಿತರಣೆಗಳು

Theoretical distributions

30.1 ಪೀಠಿಕೆ

30.2 ಪರ್ಮ್ಯುಟೇಷನ್ ಮತ್ತು ಕಾಂಬಿನೇಷನ್

30.3 ಬೈನಾಮಿಯಲ್ ವಿತರಣೆ

30.4 ನಿಮ್ಮ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

30.5 ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆ

30.6 ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆ ಲಕ್ಷಣಗಳು

30.7 ಪಾಯಿಸನ್ ವಿತರಣೆ

30.8 ಪಾಯಿಸನ್ ವಿತರಣೆಯ ಲಕ್ಷಣಗಳು

30.9 ಸಾರಾಂಶಿಸೋಣ

30.10 ಮುಖ್ಯ ಪರಿಭಾವನೆಗಳು

30.11 ನಿಮ್ಮ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

30.12 ಮುಂದಿನ ಓದಿಗಾಗಿ

30.13 ಗಣೀತೀಯ ವಿಧಾನಗಳ ಬಗ್ಗೆ - ಉಪಸಂಹಾರ

ಘಟಕ -30

ತಾತ್ವಿಕ ವಿತರಣೆಗಳು

Theoretical distributions

30.1 ಪೀಠಿಕೆ:

ಈ ಘಟಕದಲ್ಲಿ ನಾವು ಕೆಲವು ಸಾಮಾನ್ಯ ತಾತ್ವಿಕ ವಿತರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡುತ್ತೇವೆ. ಈ ಹಿಂದೆ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಮೂಡಿಸಿದರೂ, ಅದು ಒಂದು ರೇಖಾ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿದೆವು. ಅದು ಸರಳರೇಖೆ ಯಾಗಬಹುದು ಅಥವಾ ವಕ್ರ ರೇಖೆ ಯಾಗಬಹುದು. ಈ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಗಣಿತ ಬಿಂಬಕ ಸಂಬಂಧ ಇದ್ದೇ ಇರುತ್ತದೆ. ಈ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ತಾತ್ವಿಕ ವಿತರಣೆ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಕೆಲವು ವಿತರಣೆಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಪಕವಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅವುಗಳೆಂದರೆ, ಬೈನಾಮಿಯಲ್ ವಿತರಣೆ, ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆ ಅಥವಾ ನಾರ್ಮಲ್ ವಿತರಣೆ, ಎಫ್ ವಿತರಣೆ, ಕೈಸ್ಕ್ವೇರ್ ವಿತರಣೆ, ಟಿ ವಿತರಣೆ(t-distribution), ಪಾಯಿಸನ್ ವಿತರಣೆಇತ್ಯಾದಿ. ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನಾವು ಬೈನಾಮಿಯಲ್ ವಿತರಣೆ, ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆ ಮತ್ತು ಪಾಯಿಸನ್ ವಿತರಣೆಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಅವುಗಳ ಅನ್ವಯವನ್ನು ಸಹ ನೋಡುತ್ತೇವೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಂತ ಮುಖ್ಯವಾದುದೆಂದರೆ, ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆ. ಇದನ್ನು ಬಹಳ ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಬೇಕು.

30.2 ಪರ್ಮುಟೇಷನ್ ಮತ್ತು ಕಾಂಬಿನೇಷನ್:(Permutations and combinations)

ತಾತ್ವಿಕ ವಿತರಣೆಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಲು ಅಗತ್ಯವಾದ ಎರಡು ಪರಿಭಾವನೆಗಳೆಂದರೆ ಪರ್ಮುಟೇಷನ್ ಮತ್ತು ಕಾಂಬಿನೇಷನ್

ಪರ್ಮುಟೇಷನ್ : ಒಂದು ಗುಂಪಿನ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಪರ್‌ಮ್ಯುಟೇಷನ್ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. 'n' ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಿಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, 'n' ಗುಂಪಾಗಿ ಜೋಡಿಸಬಹುದಾದ ರೀತಿ n!(ಇದನ್ನು n ಫ್ಯಾಕ್ಟೋರಿಯಲ್ ಎಂದು ಓದಬೇಕು)

$n! = n(n-1)\,(n-2)......3,2,1$

ಇದನ್ನು $_nP_n$ ಎಂದು ಸಹ ಗುರುತಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $n! = {}_nP_n$

ಉದಾಹರಣೆ: ಒಂದು ಕಛೇರಿಯಲ್ಲಿ 4 ಗುಮಾಸ್ತರಿದ್ದಾರೆ. ಮತ್ತು 4 ಟೇಬಲ್‌ಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ಗೋಡೆಗೆ ಒತ್ತಾಗಿ ಜೋಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಒಬ್ಬ ಗುಮಾಸ್ತ ಒಂದು ಟೇಬಲ್‌ನಲ್ಲಿ ಕೂರುವಂತೆ ಇದನ್ನು ಎಷ್ಟು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಬಹುದು?

ಉತ್ತರ:$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ ಬಗೆಯಲ್ಲಿ n ವಸ್ತುಗಳನ್ನು 'r' ವಸ್ತುಗಳೊಂದರಂತೆಜೋಡಿಸಬಹುದಾದ ವಿಧಾನ

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ಉದಾಹರಣೆ: ಒಂದು ಕಂಪನಿಯಲ್ಲಿ ಸಿಬ್ಬಂದಿ ಮ್ಯಾನೇಜರ್‌ಗೆ 3 ವಿಭಾಗಗಳಿಂದ ಟೈಪಿಸ್ಟ್‌ಗಳು ಬೇಕೆಂದು ಬೇಡಿಕೆ ಬಂದಿದೆ. ಸಂದರ್ಶನಕ್ಕಾಗಿ 7 ಅಭ್ಯರ್ಥಿಗಳು ಬಂದಿದ್ದಾರೆ. ಇವರಲ್ಲಿ 3ಜನರನ್ನು ಎಷ್ಟು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಬಹುದು.

ಉತ್ತರ: ಮೊದಲನೆಯ ವಿಭಾಗಕ್ಕೆ 7 ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನೇಮಕ ಮಾಡಬಹುದು. ನಂತರ ಎರಡನೆಯ ವಿಭಾಗಕ್ಕೆ 6 ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯ ವಿಭಾಗಕ್ಕೆ 5 ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನೇಮಕ ಮಾಡಬಹುದು.

ಅಂದರೆ $7 \times 6 \times 5 \times = 210$ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹುದ್ದೆಗೆ ಭರ್ತಿ ಮಾಡಬಹುದು. ಇದನ್ನೇ ಮತ್ತೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ

$${}_7P_3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7 \ x \ 6 \ x \ 5 \ x \ 4!}{4!} = 7x6x5 = 210$$

ಕಾಂಬಿನೇಷನ್: ವಿವಿಧ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಯಾವುದೇ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ರೀತಿಯಿಲ್ಲಿದೆ ಜೋಡಿಸಬಹುದಾದ ಕ್ರಮವನ್ನು ಕಾಂಬಿನೇಷನ್ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

n ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಬಾರಿ 'r'ರಷ್ಟು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ನಡೆಸಬಹುದಾದ ಕಾಂಬಿನೇಷನ್ ಅನ್ನು ncr ಎಂದು ನಮೂದಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರ ಸೂತ್ರ

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ಉದಾಹರಣೆ: ಒಬ್ಬ ಸೇಲ್ಸ್ ಮ್ಯಾನೇಜರ್ ಬಳಿ 7 ಜನ ಕ್ಷೇತ್ರ ಕೆಲಸಗಾರರಿದ್ದಾರೆ. ಒಂದು ಕಂಪನಿ ಸೇಲ್ಸ್ ಮ್ಯಾನೇಜರ್‌ಗಳ 3ದಿನಗಳ ತರಬೇತಿಗಾಗಿ ಕ್ಷೇತ್ರ ಕೆಲಸಗಾರರನ್ನು ಕಳುಹಿಸಿಕೊಡಬೇಕೆಂದು ಕೇಳಿದೆ. ಸೇಲ್ಸ್ ಮ್ಯಾನೇಜರ್‌ಗೆ 7 ಜನರನ್ನೂ ಕಳುಹಿಸುವ ವಿಚಾರವಿದೆ. ಆದರೆ ಕಂಪನಿಯ ಬಜೆಟ್ 3 ಜನರಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಸಾಕಾಗುವಂತಿದೆ. ಈ 3 ಜನರನ್ನು ಎಷ್ಟು ಬಗೆಗಳಲ್ಲಿ ಗುಂಪುಗಳಾಗಿ ಮಾಡಬಹುದು?

7 ಜನರಿಂದ 3ಜನರನ್ನು ಗುಂಪಾಗಿ ಮಾಡಬಹುದಾದ ಸಂಖ್ಯೆ

$${}_7C_3 = \frac{7!}{4!\,3!} = \frac{7 X 6 X 5 X 4!}{4\,!\,3 X 2 X 1} = 35$$

ಸೂಚನೆ: ಪರ್ಮುಟೇಷನ್‌ನಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸುವ ವಿಧಾನ ಮುಖ್ಯ. ಆದರೆ ಕಾಂಬಿನೇಷನ್‌ನಲ್ಲಿ ಈ ರೀತಿಯ ನಿರ್ದಿಷ್ಟತೆ ಇಲ್ಲ. ಗುಂಪನ್ನು ಯಾವ ರೀತಿಯಲ್ಲಾದರೂ ಮಾಡಬಹುದು.

30.3 ಬೈನಾಮಿಯಲ್ ವಿರತಣೆ(Binomial distribution)

ಒಂದು ಘಟನೆ, ಯಶಸ್ಸನ್ನು ಸಾಧಿಸುವುದರ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು p ಎಂದು, ಅದು ವಿಫಲವಾಗುವುದನ್ನು q ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ. ಸಹಜವಾಗಿ p+q=1. ಈ ಘಟನೆಯನ್ನು 'n' ಬಾರಿ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಈ ಘಟನೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸ್ವತಂತ್ರವಾದವು ಎಂದು ಬಾವಿಸೋಣ. pಮತ್ತು q ಘಟಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಸಮಾನ ಅವಕಾಶವಿದೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಈ ಘಟನೆಯನ್ನು ತುಂಬಾ ಸಲ ನಡೆಸಲಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಎಷ್ಟುಬಾರಿ ಯಶಸ್ಸನ್ನು ಸಾಧಿಸಲಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಪಟ್ಟಿಮಾಡೋಣ.

ಯಶಸ್ಸಿನ ಸಂಖ್ಯೆ	ಎಷ್ಟುಬಾರಿ ಯಶಸ್ಸನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದೆ ಎನ್ನುವುದರ ಆವರ್ತ
x	f
0	X_0
1	X_1
2	X_2
3	X_3
	.
.	.
.	
.	.
n	x_n

ಆದ್ದರಿಂದ n ಘಟನೆಗಳು X_0 X_1X_2......X_n ಯಶಸ್ಸಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು $(q+p)^n$ ಎಂಬುದರ ಮೂಲಕ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು.

ಇದರ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಬೈನಾಮಿಯಲ್ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಬಹುದು.

'n'ಸ್ವತಂತ್ರಘಟಕಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಘಟನೆ E ನಡೆಯುವ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ p ಆಗಿದ್ದರೆ, ಅದು x ಬಾರಿ ಯಶಸ್ಸು ಆಗುತ್ತದೆ. ಎನ್ನುವುದರ ಸಂಭಾನೀಯತೆ

$$f(x)={}_nC_r \quad P^r \ x^{n-r}$$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಬೈನಾಮಿಯಲ್ ವಿತರಣೆಯ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ =np

ಅದರ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ: $\sigma = \sqrt{{}_n p_q}$

ಅದರ ವೇರಿಯನ್ಸ್ : $\sigma^2 = {}_n p_q$

ಅದರ ವಿಷಮತೆ $\dfrac{q - p}{\sqrt{{}_n p_r}}$

ಅದರ ಶೃಂಗತೆ $= \beta_2 = 3 + \dfrac{1 - 6pq}{\sqrt{{}_n p_r}}$

ಉದಾಹರಣೆ: ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು 4ಬಾರಿ ಚಿಮ್ಮಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇದರಿಂದ 2ಬಾರಿ 'ರಾಜ'ನನ್ನು (Head) ಪಡೆಯುವ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

ಎರಡುಬಾರಿ 'ರಾಜ'ನನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ =

$$= 4c_2 p^2 q^2$$

$$= \frac{4!}{(4-2)!\,2!} X \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

ಏಕೆಂದರೆ $P = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

$$= \frac{4\ X\ 3\ X\ 2\ X\ 1}{2\ X\ 2} X \ \frac{1}{2} X \ \frac{1}{4}$$

$$= \frac{6}{16}$$

ಆದ್ದರಿಂದ

ಉದಾಹರಣೆ2:

12ಟೆಲಿವಿಷನ್ ಲ್ಯಾಬ್‌ಗಳಲ್ಲಿ 3 ಟ್ಯೂಬ್‌ಗಳು ಕಳಪೆಯಾದವು. ಒಂದು ಲ್ಯಾಬ್‌ನಿಂದ 3 ಸ್ಯಾಂಪಲ್‌ಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಕೊಂಡರೆ, ಇವುಗಳಲ್ಲಿ 1 ಕಳಪೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಎನ್ನುವುದರ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

$p(1) = {}_3C_1 (0.25)^2 (0.75)^2$ [12 ರಲ್ಲಿ 3 ಕಳಪೆ ಅಂದರೆ P=3/12 ಮತ್ತು q = 9/12 = 1/4,3/4]

$$= \frac{3!}{(3-1)!\,1!}(0.25)^2(0.75)^2$$

$$\frac{3\ X\ 2\ X 1}{2!\,1!}(0.0625)(0.056)$$

$$P(1) = 0.105$$

30.4 ನಿಮ್ಮ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

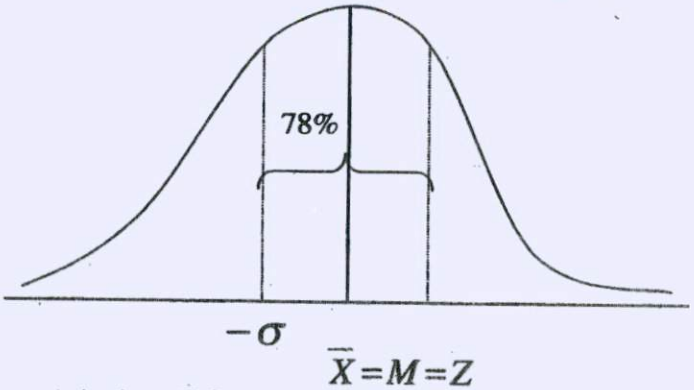
1. ತಾತ್ವಿಕ ವಿತರಣೆ ಎಂದರೇನು?
2. ಅತಿಮುಖ್ಯ ತಾತ್ವಿಕ ವಿತರಣೆಗಳು ಯಾವುವು?
3. ಬೈನಾಮಿಯಲ್ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ವಿವರಿಸಿ.

30.5 ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆ (Normal Distribution)

ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆ, ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಬಹಳ ವ್ಯಾಪಕವಾಗಿ ಬಳಸಲಾಗುವ ಒಂದು ವಿತರಣೆ. ಈ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಮೂಡಿಸಿದಾಗ ಅದು ಗಂಟೆಯ ಆಕಾರವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತದೆ. ಇದು OX-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ
ಯ ವರೆಗೆ ಚಾಚಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಗಂಟೆಯ ಆಕಾರ ವಿತರಣೆಯ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಮಾನಕ ವಿಚಲನವನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸುತ್ತದೆ. ಇದರ ಮುಖ್ಯ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.

30.6 ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆಯ ಲಕ್ಷಣಗಳು

1. ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆ ಸತತ ಶ್ರೇಣಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ವಿತರಣೆ
2. ಈ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ, ಮಧ್ಯಕ ಬಹುಳಕಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.
3. $\bar{X}+\sigma$ ಮತ್ತು $\bar{X}-\sigma$ ವಿತರಣೆಯ ರೇಖೆಯ ಕೆಳಗಿನ ಶೇ 78.3ರಷ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಒಳಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.



$\bar{X} \pm 2\sigma$ ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆಯ ಕೆಳಗಿನ ಶೇ 95.5ರಷ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಒಳಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.

4. X- ಚಲದ ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆಯ ಬಿಂಬಕವನ್ನು

$$y = f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\right)} \qquad -\infty < X < +\infty$$

ಸೂತ್ರದಿಂದ ಕೊಡಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ σ - ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆಯ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ

π =3.1416

e =2.7183

μ = ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆಯ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ

5. ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆ ರೇಖೆ ಅತ್ಯಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಎತ್ತರವನ್ನು ತಲುಪುತ್ತದೆ.

6. ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆಯ ವಿಷಮತೆ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

7. ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆಯ ಕೆಳಗಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ 1ಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯ ಎಡಭಾಗಕ್ಕೆ 0.5ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗಕ್ಕೆ 0.5ರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಇರುತ್ತದೆ.

8. ಮೇಲಿನ ಹಾಗೂ ಕೆಳಗಿನ ಚತುರ್ಥಕಗಳು ಸಮಾನಾರ್ಧದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

9. ಟಿ. ವಿತರಣೆ(t-distributions), F ವಿತರಣೆ ಮತ್ತು x^2 ವಿತರಣೆಗಳು, ಮಾದರಿಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತಾ ಹೋದಂತೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆಯ ಕಡೆಗೆ ಹೊರಳುತ್ತದೆ.

ಸ್ಟಾಂಡರ್ಡ್‌ಡೈಸರ್ ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆ(standardised normal distribution)

ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆಯ ಬಿಂಬಕವನ್ನು ಮೇಲೆ ನೋಡಿದೆವು. ಅದರ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ತುಂಬಾ ಕಷ್ಟ. ಆದುದರಿಂದ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ 0 ಇರುವ ಮತ್ತು ಮಾನಕ ವಿಚಲನ 1 ಆಗಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆಯನ್ನು 'ದೃಡಗೊಳಿಸಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆ'ಎಂದು ಗುರುತಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ರೇಖೆಯ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಭಾವನೀಯತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವುದು ಸುಲಭ, ಇವುಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿಮಾಡಿ ಎಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ಪುಸ್ತಕಗಳಲ್ಲೂ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ಚಲದ ವಿತರಣೆಯನ್ನು $Z \sim N(0,1)$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿZ, "ದೃಡಗೊಳಿಸಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆ".

ಈ ವಿತರಣೆಯ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸಂಭಾವನೀಯತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವುದು ಸುಲಭ.

ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆಯನ್ನು 'ದೃಡಗೊಳಿಸಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆ'ಯಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಲು

$Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}$ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ: ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆಗೆ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ 5 ಆಗಿದೆ. ಅದರ ವೇರಿಯನ್ಸ್ 2ಆಗಿದೆ. x ಗೆ 2ಮತ್ತು 3ರ ನಡುವೆ ಇರುವ ಸಂಭಾವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ.

ಈ ಸಂಭಾವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು $P(2<X<3)$ ರ ಸಂಭಾವನೀಯತೆಯನ್ನು ದೃಡಗೊಳಿಸಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆಯಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಬೇಕು.

$$Z_1 = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}$$

$$Z_1 = \frac{2-5}{2} = \frac{-3}{2}$$

ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ $$Z_2 = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} = \frac{3-5}{2} = -\frac{-2}{2} = -1$$

ಆದ್ದರಿಂದ $$p(2 < X < 3) = P(\frac{-3}{2} < Z < -1)$$

$$= P(0 < Z < 1.5)$$

$$= 0.4332 - 0.3413$$

$$= 0..919$$ (ಟೇಬಲ್ ಬೆಲೆ)

ಅಂದರೆ X,2 ಮತ್ತು 3ರ ನಡುವಣ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ 0.09ಅಥವಾ ಶೇ 9.

ಉದಾಹರಣೆ: ಒಂದು ಜಮೀನಿನಲ್ಲಿ ಎಕರೆಯೊಂದರ ಸರಾಸರಿ ಬೆಳೆ 600ಕಿಲೋಗ್ರಾಂಗಳು. ಈ ಕ್ಷೇತ್ರದ ಬೆಳೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಬೆಲೆಯ ವೇರಿಯನ್ಸ್ 30 ಆದರೆ, ಪ್ರತಿ 100 ಒಂದು ಎಕರೆ ಹಿಡುವಳಿಗಳಲ್ಲಿ

(1) ಪ್ರತಿ ಎಕರೆಗೆ 700 ಕಿಲೋಗ್ರಾಂಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಬೆಳೆ ಬೆಳೆಯುವ ಹಿಡುವಳಿಗಳು ಎಷ್ಟಿರಬಹುದು?

ಉತ್ತರ: ಬೆಳೆಯನ್ನು X ನಿಂದ ಸೂಚಿಸೋಣ ಆಗ ಈ ವಿತರಣೆಯನ್ನು X~N (600,30) ಎಂದು ಸೂಚಿಸಬಹುದು

700 ಕಿಲೋಗ್ರಾಂಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಬೆಳೆಬರುವ ಹಿಡುವಳಿಗಳು

P(X >700)ಇದನ್ನು Z ಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿದರೆ

$$Z = \frac{X-600}{30} = \frac{700-600}{30} = 3.33$$

$$= 0.5 - P(0 < Z < 0.33)$$

$$0.5 - 0.4996$$ (ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆ ಟೇಬಲ್ ನಿಂದ)

$$= 0.0004$$

ಆದ್ದರಿಂದ 1000 ಹಿಡುವಳಿಗಳಲ್ಲಿ 700 K.G. ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಬೆಳೆ ಬರುವ ಹಿಡುವಳಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ=

1000 X 0.0004 = 4

(ii) 500ಕಿಲೋಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಬೆಳೆ ಬರುವ ಹಿಡುವಳಿಗಳ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ ಸಂಖ್ಯೆ

1000 X P(X<500)

=1000 XP(Z<-3.33)

ಏಕೆಂದರೆ, $Z = \frac{(500-600)}{30} = \frac{-100}{30} = 3.33$

$$= 1000XP(Z > 3.33)$$

$$= 1000X0.0004$$

$$= 4$$

ಆದ್ದರಿಂದ 1000 ಹಿಡುವಳಿಗಳಲ್ಲಿ 500ಕಿಲೋಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಬೆಳೆ ಬರುವ ಹಿಡುವಳಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 4

ಉದಾಹರಣೆ: ಒಂದು ನಿಶ್ಚಿತ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ 10,000ಬೀದಿ ದೀಪಗಳನ್ನು ಹಾಕಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿ ಬಲ್ಬ್‌ನ ಜೀವಿತ ಅವಧಿ 1000ಗಂಟೆಗಳು. ಈ ಜೀವಿತ ಅವಧಿಗಳು ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆ ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿದು ಬಂದಿದೆ. ಈ ವಿತರಣೆಯ ವೇರಿಯನ್ಸ್ 100 ಗಂಟೆಗಳು. ಮೊದಲ 900 ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಬಲ್ಬ್‌ಗಳು ಕೆಟ್ಟು ಹೋಗಬಹುದು ಎಂಬುದರ ಸಂಭಾವನೀಯತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿ.

X - ಬಲ್ಬ್‌ನ ಜೀವಿತ ಅವಧಿಯಾಗಿರಲಿ

ಆಗ X~N(1000,100)

ಮೊದಲ 900 ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಟ್ಟು ಹೋಗಬಹುದಾದ ಬಲ್ಬ್‌ಗಳು

P(X<900)

=P(Z<-1)

=P(Z<1) ಏಕೆಂದರೆ $Z = \frac{(900-1000)}{100} = \frac{-100}{100} = -1$

= 0.5-P(0<Z<1)

=0.5-0.3413(ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆ ಟೇಬಲ್‌ಬೆಲೆ)

=0.1587

ಆದ್ದರಿಂದ 10,000ಬಲ್ಬ್‌ಗಳಲ್ಲಿ 900 ಗಂಟೆಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಅವಧಿ ಉರಿಯುವ ಬಲ್ಬ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

10,000 X 0.1587=1587

30.7 ಪಾಯಿಸನ್ ವಿತರಣೆ(Poission Distribution)

ಫ್ರೆಂಚ್ ಗಣತಜ್ಞ ಎಸ್. ಪಾಯಿಸನ್ ಈ ವಿತರಣೆಯನ್ನು 1837ರಲ್ಲಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿದುದರಿಂದ ಆತನ ಹೆಸರಿನಲ್ಲಿ ಇದು ಪ್ರಸಿದ್ಧವಾಗಿದೆ.

ಇದರ ಗಣಿತೀಯ ಬಿಂಬಕ ಸ್ವರೂಪ

$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-m} m^x}{x!},\ x = 0,1,2\ldots$$

ಇಲ್ಲಿ m-ವಿತರಣೆಯ ಪೆರಾಮೀಟರ್

e-2.7183

ಈ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವಾಗಲೂ

$f(x) > 0$ಮತ್ತು $\Sigma f(x)=1$

ಈ ವಿತರಣೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳು ಸಹ ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆಯ ಟೇಬಲ್‌ಗಳಂತೆಯೇ, ಟೇಬಲ್ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲೂ ಲಭ್ಯವಿದೆ.

30.8 ಪಾಯಿಸಾನ್ ವಿತರಣೆಯ ಲಕ್ಷಣಗಳು

(1) ಇದು Xನ ಬೆಲೆ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವಾಗ ಸಂಭಾವನೀಯತೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸುತ್ತದೆ.

(2) mನ ಸಂಖ್ಯೆ ಜಾಸ್ತಿಯಾಗುತ್ತಾ ಹೋದಂತೆ ಪಾಯಿಸಾನ್ ವಿತರಣೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳತ್ತದೆ.

(3) ಪಾಯಿಸಾನ್ ವಿತರಣೆ n ತುಂಬಾ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವಾಗ ಮತ್ತು Pಕಡಿಮೆಯಿರುವಾಗ ಬೈನಾಮಿಯಲ್ ವಿತರಣೆ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.

(4) ಪಾಯಿಸಾನ್ ವಿತರಣೆ ಅನ್ವಯವಾಗುವ ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳೆಂದರೆ,

(i) ಒಂದು ಸರಕಿನ ಬೇಡಿಕೆಯ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ

(ii) ಒಂದು ಪುಟ ಟೈಪ್ ಮಾಡಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ತಪ್ಪುಗಳ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ

(iii) ಒಂದು ಫ್ಯಾಕ್ಟರಿಯಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಅಪಘಾತಗಳ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ

(iv) ಒಂದು ಅಂಗಡಿಗೆ ಭೇಟಿ ಕೊಡುವ ಜನರ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ

(v) ಒಂದು ಫ್ಯಾಕ್ಟರಿಯಲ್ಲಿ ಉತ್ಪಾದಿತವಾಗುವ ಸರಕುಗಳಲ್ಲಿ, ನ್ಯೂನತೆಹೊಂದಿರುವ ಸರಕುಗಳ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ

(vi) ಒಂದು ಟೆಲಿಫೋನ್ ವಿನಿಮಯ ಕೇಂದ್ರಕ್ಕೆ ಬರುವ ಕರೆಗಳ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ ಇತ್ಯಾದಿ.

(5) ಪಾಯಿಸಾನ್ ವಿತರಣೆಯ ಸರಾಸರಿ = m

ವಿತರಣೆಯ ವೇರಿಯನ್ಸ್= m

ಆದ್ದರಿಂದ ಪಾಯಿಸನ್ ವಿತರಣೆಯ ಸರಾಸರಿ = ವೇರಿಯನ್ಸ್ =m

(6) ಪಾಯಿಸನ್ ವಿತರಣೆ ಧನಾತ್ಮಕ ವಿತರಣೆ ಯಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ: ಒಂದು ಕಾರ್ಖಾನೆಯಲ್ಲಿ ಉತ್ಪಾದಿತವಾಗುವ 400 ಸರಕುಗಳಲ್ಲಿ 1ಸರಕು ನ್ಯೂನತೆಯಿಂದ ಕೂಡಿರುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿ 100 ಸರಕುಗಳನ್ನು ಒಂದು ಪ್ಯಾಕೇಟ್ ಆಗಿ ಮಾಡಿರುವಾಗ , ಒಂದು ಪ್ಯಾಕೇಟ್‌ನಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಭಾವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ

(i) ಯಾವುದೇ ನ್ಯೂನತೆ ಇರುವ ಸರಕು ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

(ii) ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಸರಕುಗಳು ನ್ಯೂನತೆಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ.

(iii) ಒಂದು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚಿನ ಸರಕುಗಳು ನ್ಯೂನತೆ ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ.

(iV)3 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ನ್ಯೂನ್ಯತೆಹೊಂದಿರುವ ಸರಕುಗಳು ಇರುತ್ತವೆ.

ಉತ್ತರ: ಇಲ್ಲಿ p=1/400 ಅಂದರೆ ಒಂದು ಸರಕು ನ್ಯೂನತೆ ಹೊಂದಿರುವ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ ಬಹಳ ಕಡಿಮೆ

n= 100 - ಒಂದು ಪ್ಯಾಕ್‌ನಲ್ಲಿರುವ ಸರಕುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

m= np=100/400 = 0.25, 100ರ ಡಬ್ಬದಲ್ಲಿ ಸರಾಸರಿ ನ್ಯೂನತೆಹೊಂದಿರುವ ಸರಕುಗಳು

(i) ಒಂದು ಸರಕು ನ್ಯೂನವಾಗಿಲ್ಲದಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ

$p(X=0) = e^{-m} = e^{-0.25} = 0.7788$(ಟೇಬಲ್‌ನಿಂದ)

(ii) 2 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಸರಕುಗಳು ನ್ಯೂನತೆ ಹೊಂದಿರುವ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ

$$= P(X \leq 1) = P(x=0) + P(x=1)$$
$$= e^{-m} + me^{-m} = e^{-m}(1+m)$$
$$= 0.07788\,(1+0.25) = 0.9735$$

(iii) ಒಂದು ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸರಕುಗಳು ನ್ಯೂನತೆ ಹೊಂದಿರುವ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ =

$$p[X \geq 1] = 1 - p[X = 0]$$
$$1 - e^{-m} = 1 - 0.7788 = 0.2212$$

(iv)3 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸರಕುಗಳು ನ್ಯೂನತೆ ಹೊಂದಿರುವ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ

$$= P[X \geq 4] = 1 - [(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)]$$

$$= 1 - \left[e^{-m} + me^{-m} + \frac{m^2}{2} e^{-m} + \frac{m^3}{6} e^{-m} \right]$$

$$1 - e^{-m} \left[1 + m + \frac{m^2}{2} + \frac{m3}{6} \right]$$

$$1 - 0.7788 \left[1 + m + \frac{m^2}{2} + \frac{m3}{6} \right]$$

$$= 1 - 0.7788[1 + 0.258 + 0.03125 + 0.0026]$$

$$= 1 - 0.7788[1.28385]$$

$$= 1 - 0.99986$$

$$= 0.00014$$

30.9 ಸಾರಾಂಶಿಸೋಣ

ಈ ಯೂನಿಟ್‌ನಲ್ಲಿ ನಾವು ಪರ್‌ಮ್ಯುಟೇಷನ್ ಮತ್ತು ಕಾಂಬಿನೇಷನ್ ಪರಿಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಕಲಿತುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಪರಿಭಾವನೆಗಳು ಒಂದು ಗುಂಪಿನ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ನಿರ್ದಿಷ್ಟತೆ ಇಲ್ಲದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಜೋಡಿಸಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತವೆ. ಜೊತೆಗೆ ತಾತ್ವಿಕ ವಿತರಣೆಗಳಾದ ಬೈನಾಮಿಯಲ್, ನಾರ್ಮಲ್ ಮತ್ತು ಪಾಯಿಸನ್ ವಿತರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಿಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ, ಸಂಭಾವನೀಯತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಸಹ ಕಲಿತಿದ್ದೇವೆ. ಈ ವಿತರಣೆಗಳಲ್ಲಿ 'ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆ' ಅತ್ಯಂತ ಮುಖ್ಯವಾದುದು. ಅದರ ಬಳಕೆ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ತುಂಬಾ ವ್ಯಾಪಕವಾಗಿ ನಡೆಯುತ್ತದೆ. ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಈ ವಿತರಣೆಗಳ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಸಹ ನಾವು ಈ ಘಟಕದಲ್ಲಿ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ.

30.10 ಮುಖ್ಯ ಪರಿಭಾವನೆಗಳು

1. ಪರ್ಮ್ಯುಟೇಷನ್

2. ಕಾಂಬಿನೇಷನ್

3. ಬೈನಾಮಿಯಲ್ ವಿತರಣೆ

4. ನಾರ್ಮಲ್ ವಿತರಣೆ

5. ಪಾಯಿಸಾನ್ ವಿತರಣೆ

6. ವಿತರಣೆಯ ಸೂತ್ರಗಳು

(i) ಬೈನಾಮಿಯಲ್ ವಿತರಣೆ

$$f(x) = {}_N C_x P^x q^{n-x}$$

(ii) ಪಾಯಿಸಾನ್ ವಿತರಣೆ

$$f(x) = \frac{e^{-m} m^{x}}{x!}$$

(iii) ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆ

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}$$

7. ಸ್ಟಾಂಡರ್ಡೈಸಡ್ ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆ

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

30.11 ಸ್ವ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

(1) ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆಯ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಿ.

(2) ಪಾಯಿಸನ್ ವಿತರಣೆಯ ಸೂತ್ರನೀಡಿ

(3) 1000 ಕಾರ್ಮಿಕರ ವಾರದ ಕೂಲಿ ನಾರ್ಮಲ್ ವಿತರಣೆ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ಪಡೆದಿದೆ. ಇದರ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ ರೂ. 1700 ಮತ್ತು ಮಾನಕ ವಿತರಣೆ ರೂ. 150 ಆಗಿದೆ. 100 ಜನ ಅತ್ಯಂತ ಹೆಚ್ಚು ವಾರದ ಕೂಲಿ ಪಡೆಯುವ ನೌಕರರ ಕನಿಷ್ಠ ಕೂಲಿಯ ಸಂಭಾವನೀಯತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿ

(4) ಒಂದು ಡಿಪಾರ್ಟ್‌ಮೆಂಟಲ್ ಸ್ಟೋರ್‌ಗೆ ಬರುವ ಗಿರಾಕಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ ಗಿರಾಕಿ ಕಾಲ್ ಗೇಟ್ ಟೂತ್ ಪೇಸ್ಟ್ ಕೊಳ್ಳುತ್ತಾನೆ ಎನ್ನುವುದರ ಸಂಭವನೀಯತೆ 0.3ಈ ಸ್ಟೋರ್‌ನಲ್ಲಿ ಟೂತ್ ಪೇಸ್ಟ್‌ನ ಸ್ಟಾಕ್ ಮುಗಿದು ಹೋಗುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಶೇ1ಆದರೆ, ಈ ಸ್ಟೋರ್ ಕನಿಷ್ಠ ಎಷ್ಟು ಟೂತ್ ಪೇಸ್ಟ್‌ಗಳ ಸ್ಟಾಕ್ ಇಟ್ಟು ಕೊಂಡಿರಬೇಕು?

[ಉತ್ತರ 334]

(5) ಒಂದು ಕಂಪನಿಯ ಉತ್ಪಾದನೆಯಲ್ಲಿ ಶೆ 2ರಷ್ಟು ಬಲ್ಪ್‌ಗಳು ನ್ಯೂನತೆ ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ. ಹಾಗಾದರೆ 200ಸರಕುಗಳ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ 5 ಸರಕುಗಳು ನ್ಯೂನತೆ ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ ಎನ್ನುವುದರ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

[ಉತ್ತರ0.784]

30.12 ಮುಂದಿನ ಓದಿಗಾಗಿ

D.W. Elhance: Fundamentals of statistic-ಅಧ್ಯಾಯ -18

30.13 ಗಣೀತೀಯ ವಿಧಾನಗಳ ಬಗ್ಗೆ

ಉಪ ಸಂಹಾರ

ಕಳೆದ 30 ಘಟಕಗಳಲ್ಲಿ ನೀವು ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರಕ್ಕೆ ಅಗತ್ಯವಾದ ಗಣೀತೀಯ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಮಾಡಿ ಕೊಂಡಿದ್ದೀರಿ. ನಮ್ಮ ಅಗತ್ಯತೆಗೋಸ್ಕರ ಇದನ್ನು ನಾವು ಗಣೀತೀಯ ವಿಧಾನ ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರವಿಧಾನವೆಂದು ವಿಂಗಡಿಸಿಕೊಂಡು ಕೆಲವು ಮೂಲ ಭೂತ ಸಾಧನಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ. ಇಂದು ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರಕ್ಕೆ ಗಣಿತ, ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ, ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ಜ್ಞಾನ ಅತ್ಯಗತ್ಯ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಮರೆಯಬಾರದು. ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದ ವಿಧ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೆಲ್ಲರಿಗೂ ಈ ಮೂರು ಭಾಗಗಳ ಪರಿಚಯ ಅತ್ಯಗತ್ಯ ಈ ಪತ್ರಿಕೆಯಲ್ಲಿ ನೀವು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿರುವುದು ಪರಿಮಾಣ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದ ಪ್ರಾರಂಭಿಕ ಪಾಠಗಳು ಅಷ್ಟೆ. ಇದರ ಬಗ್ಗೆ ಹೆಚ್ಚಿನ ಆಸಕ್ತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವವರು ಕೆಳಗಿನ ಮೂರು ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಆಳವಾಗಿ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವುದು ಅಗತ್ಯ. ಕನ್ನಡ ಮಾಧ್ಯಮದಲ್ಲಿ ಈ ಬಗ್ಗೆ ಪುಸ್ತಕಗಳಿಲ್ಲದಿರುವುದು ದೌರ್ಭಾಗ್ಯ. ಆದರೆ ಕಾಲಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಕನ್ನಡದಲ್ಲೂ ಉತ್ತಮ ಪುಸ್ತಕಗಳು ಲಭ್ಯವಾಗುತ್ತವೆ. ನಿಮಗೆ ಈ ಪತ್ರಿಕೆಯ ಬಗ್ಗೆ ಹೆಚ್ಚಿನ ಮಾಹಿತಿ ಬೇಕಾದರೆ, ಮುಖ್ಯಸ್ಥರು, ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಭಾಗ, ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯ ಮುಕ್ತ ವಿಶ್ವ ವಿದ್ಯಾನಿಲಯ ಮಾನಸ ಗಂಗೋತ್ರಿ, ಮೈಸೂರು-6 ಇವರನ್ನು ಸಂಪರ್ಕಿಸಿ.

ಓದಲೇ ಬೇಕಾದ ಪುಸ್ತಕಗಳು

1. **Chiang A.C.** : Events of Mathametical economics
2. **Berry Bressler** : A unified introductions to mathametical economics
3. **D.N. Elhance, Veena Elhance, B.M. Agarwal** : Fundamentals of statistics

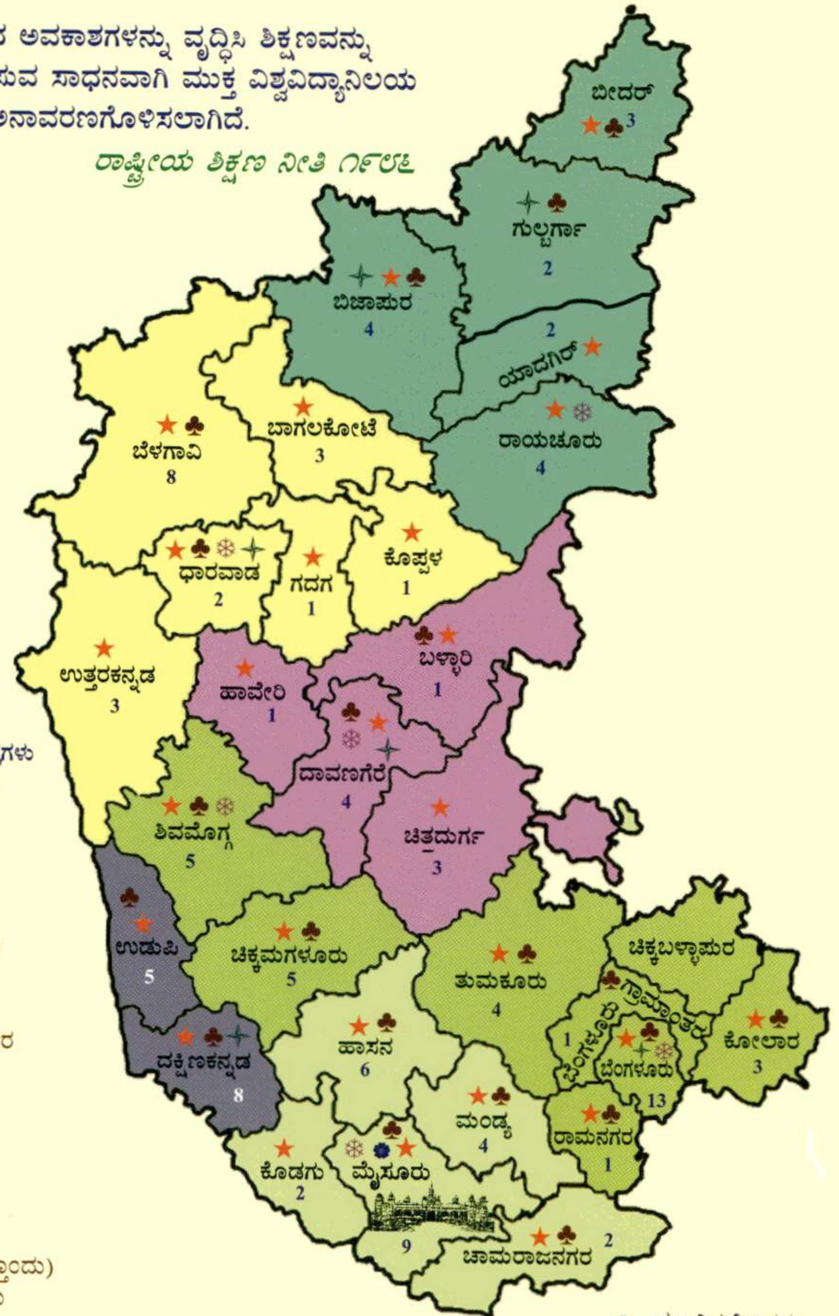
ಟಿಪ್ಪಣಿಗಾಗಿ

ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯ ಮುಕ್ತ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ

ಮುಕ್ತಗಂಗೋತ್ರಿ, ಮೈಸೂರು-570 006

ಉನ್ನತ ಶಿಕ್ಷಣದ ಅವಕಾಶಗಳನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿ ಶಿಕ್ಷಣವನ್ನು ಪ್ರಜಾತಾಂತ್ರಿಕರಿಸುವ ಸಾಧನವಾಗಿ ಮುಕ್ತ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಅನಾವರಣಗೊಳಿಸಲಾಗಿದೆ.

ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಶಿಕ್ಷಣ ನೀತಿ ೧೯೮೬

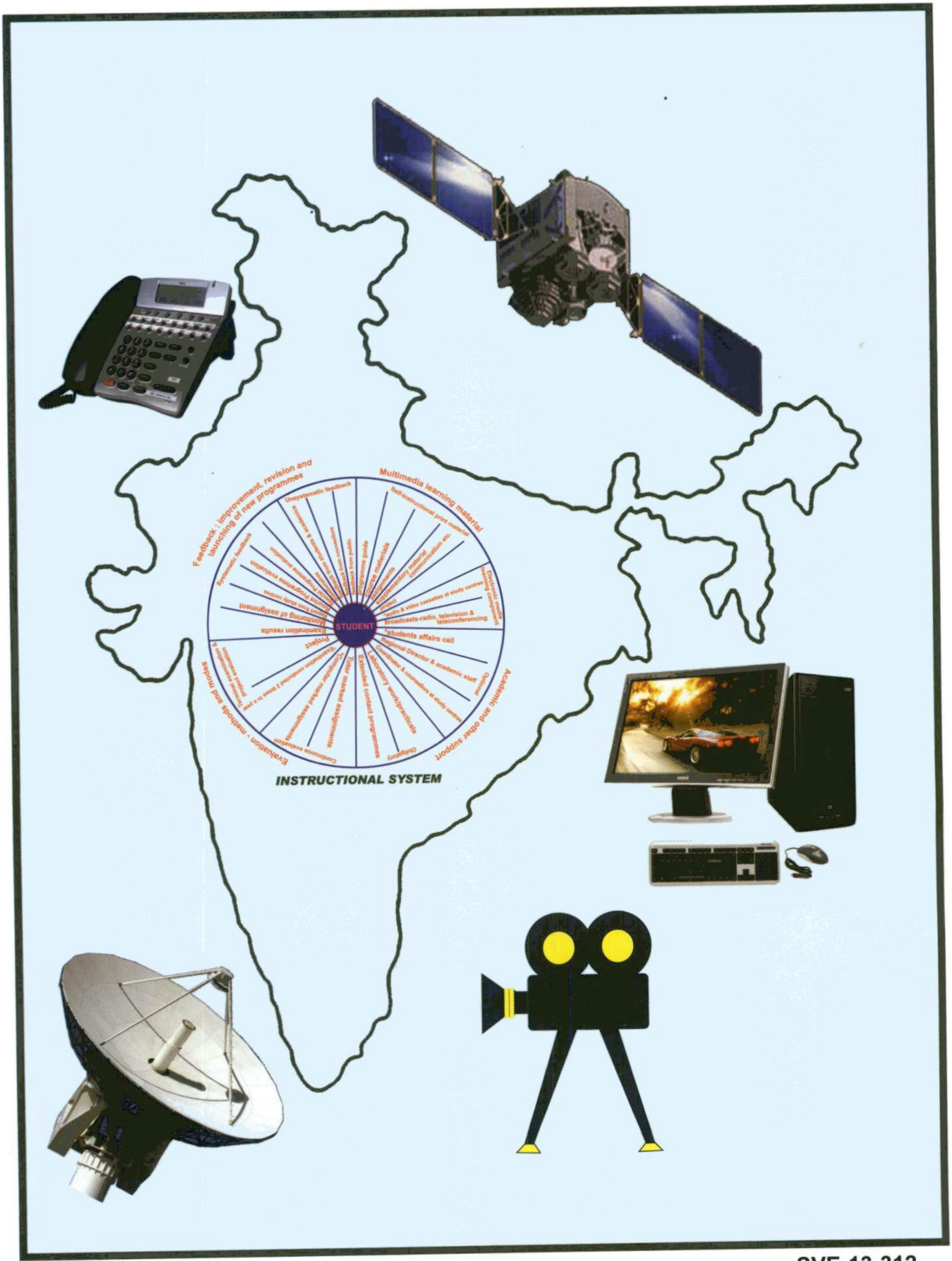


♣ ಪ್ರಾದೇಶಿಕ ಕೇಂದ್ರಗಳು

ಬೆಂಗಳೂರು
ದಾವಣಗೆರೆ
ಗುಲ್ಬರ್ಗಾ
ಧಾರವಾಡ
ಶಿವಮೊಗ್ಗ
ಮಂಗಳೂರು
ತುಮಕೂರು
ಹಾಸನ
ಚಾಮರಾಜನಗರ
ಬಳ್ಳಾರಿ
ಮಂಡ್ಯ
ಕೋಲಾರ
ಬಿಜಾಪುರ
ಬೆಳಗಾಂ
ರಾಮನಗರ
ಬೆಂಗಳೂರು (ಮತ್ತೊಂದು)
ಚಿಕ್ಕಮಗಳೂರು
ಉಡುಪಿ
ಕಾರವಾರ
ಬೀದರ್
ಮೈಸೂರು

- ● ಮುಖ್ಯಕಚೇರಿಗಳು
- ★ ಒಟ್ಟು ಅಧ್ಯಯನ ಕೇಂದ್ರಗಳು: ೧೨೩
- ♣ ಪ್ರಾದೇಶಿಕ ಕೇಂದ್ರಗಳು: ೨೧
- ❄ ಬಿ ಎಡ್ ಅಧ್ಯಯನ ಕೇಂದ್ರಗಳು: ೧೦
- ✦ ಎಂ ಎಡ್ ಅಧ್ಯಯನ ಕೇಂದ್ರಗಳು: ೦೬

ಆದೇಶ ಸಂಖ್ಯೆ : ಕರಾಮುವಿ/ಅಸಾವಿ/4-202/2014-15 ದಿನಾಂಕ : 05-06-2014
ಒಳಪುಟ : **60 GSM** ಮ್ಯಾಪ್ಲಿತೊ ಕಾಗದ ಮತ್ತು ರಕ್ಷಾಪುಟ : **220 GSM** ಫಾರಿನ್ ಮ್ಯಾಟ್ ಆರ್ಟ್ ಕಾರ್ಡ್
ಮುದ್ರಕರು : ಶ್ರೀ ವೆಂಕಟೇಶ್ವರ ಎಂಟರ್‌ಪ್ರೈಸಸ್, ಬೆಂಗಳೂರು - 560 070 ಪ್ರತಿಗಳು : 5500


Feedback : improvement, revision and launching of new programmes
Multimedia learning material
Academic and other support
Evaluation - methods and modes
Unsystematic feedback
Systematic feedback
Self-instructional print material
Programme guide
Course materials
Assignments
Supplementary material
Communication etc.
Project
Electronic media learning component
*audio & video cassettes at study centres
Broadcasts-radio, television & teleconferencing
STUDENT
*students affairs cell
Regional Director & academic staff
Coordinator & counsellors at study centres
Optional
Obligatory
Laboratory work/practicals
Extended contact programmes
Tutor marked assignments
Computer marked assignments
Continuous evaluation
Project
Examination results
Monitoring of assignment
Report from study centres
INSTRUCTIONAL SYSTEM

SVE-13-312